

令和元年6月25日現在

機関番号：12703

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15H02968

研究課題名(和文)凸錐上の線形計画法の深化と数理モデリングの新展開

研究課題名(英文)Exploration of Conic Linear Programs and Development of Mathematical Modeling

研究代表者

土谷 隆 (Tsuchiya, Takashi)

政策研究大学院大学・政策研究科・教授

研究者番号：00188575

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、凸錐上の線形計画問題のモデリング・数理・アルゴリズムについて研究を行った。特に、多面体構造を考慮した凸錐上の線形計画問題を解くための面縮小法を新たに開発し、Chubanovの新しい多項式時間解法の凸錐上の線形計画問題への拡張をはじめとする、凸錐上の線形計画問題を解くための新解法を開発を行い、さらに、内部反復前処理付きKrylov部分空間法を用いて世界で初めて、線形方程式の反復解法のみを用いた線形計画問題のための内点法の実装によって、Netlib問題を広汎に解くことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

線形計画問題は最適化の中心的問題として多くの分野で広く活用されてきた。近年その拡張として、凸錐上の線形計画問題、特に半正定値計画問題と2次錐計画問題が注目されている。これらの問題は、線形計画の変数の非負制約を、変数が半正定値対称行列錐や2次錐の直積などに属する、という条件に置き換えたもので、内点法による求解が可能となり、新たなモデリングの道具として期待されている。しかしながらそれらを自在に活用するためには問題の悪条件性、解法の安定性、モデリング技術など、種々の問題を解決する必要がある。本研究は、凸錐上の線形計画法の技術を古典的線形計画法のレベルに引き上げる上で、着実な一歩を進めたものである。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied modeling, mathematics and algorithm of conic linear programs. We developed a new facial reduction algorithm which takes advantage of polyhedral structure when the cone associated with the problem is written as the direct product of nonlinear cones and polyhedral cones, and demonstrated that for an important case of DNN cone, it reduces computational complexity dramatically. We also developed a few new algorithms for conic linear programs including an extension of Chubanov's new polynomial-time linear programming algorithm to symmetric cone programming including SDP and SOCP. We succeeded in development of new implementation of interior-point algorithms for linear programming which only employees Krylov subspace iterative methods for solving the system of linear equations arises in computing search directions. We claim that the implementation for the first time succeeded in solving extensive number of Netlib instances just by using the iterative solvers.

研究分野：統計数理と数理工学

キーワード：線形計画問題 半正定値計画問題 2次錐計画問題 面縮小法 悪条件性 モデリング Chubanov

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

線形計画問題は、最適化の中心的問題として、自然科学・社会科学・工学の分野で広く活用されてきた。これは、問題の持つ深く豊富な数理的構造によるものである。それは、最適化と離散的最適化双方の基礎として、最適化分野の発展に大きく寄与してきた。21世紀に入り、線形計画問題の拡張として、凸錐上の線形計画問題、とりわけ半正定値計画問題と2次錐計画問題が注目を集めている。これらの問題は、線形計画問題における変数の非負制約を、変数が半正定値対称行列錐や2次錐の直積などの凸錐に属する、という条件に置き換えたもので、内点法により求解が可能となり、新たなモデリングの道具として注目を集めている。しかしながら、これを、線形計画問題と同様のレベルで自在な道具として活用する上では、アルゴリズムの安定性や、モデリングの技術、問題の悪条件性など、線形計画問題にはない問題を解決していくことが必要となる。

### 2. 研究の目的

上記の背景を元に、本研究では、最適化、数値解析、データ同化、制御理論等諸分野の研究者が協力して、凸錐上の線形計画問題、特に線形計画問題、半正定値計画問題と2次錐計画問題に関する数理とアルゴリズムを総合的に深化させ、数理モデリングに活用することを目的とする。特に弱実行不能や最適値達成不能等の問題の悪条件性の背後にある数理を解明して成果を制御等の実問題に応用し、新しいアルゴリズムの可能性を追求し、行列エントロピー関数最適化の多項式時間アルゴリズムを実装して量子情報科学に応用し、海洋データ同化に現れる超大規模グラフィカルモデル推定等を通じて現在の大規模数値計算の可能性を拡げ、人工衛星データ解析への線形計画法の活用を通じて、最適化モデリングの新たな可能性を拓くことを目指した。

### 3. 研究の方法

1~2週間に一度、政策研究大学院大学においてセミナーを開催し、研究討論を行った。また、研究成果を国内学会、国際学会等で発表した。同じ分野の研究者を海外から招聘し、研究討論、情報交換をおこなった。

### 4. 研究成果

本研究においては、結果的には数理とアルゴリズムに関する成果が中心となった。(A)悪条件な凸錐上の線形計画問題を解くための面縮小法、(B)Chubanovの新しい多項式時間解法の凸錐上の線形計画問題への拡張をはじめとする、凸錐上の線形計画問題を解くための新解法の開発、(C)悪条件で大規模な凸錐上の線形計画問題を解くための数値計算手法の研究、についての成果が得られたので、それらを中心に項目別に述べる。

#### (A) 悪条件な凸錐上の線形計画問題を解くための面縮小法

主問題と双対問題に内点実行可能解が存在するような凸錐上の線形計画問題を正則な問題と呼ぶことにする。正則性は、現在主要なアルゴリズムである内点法や楕円体法を適用する上で大前提となる性質であり、これらの解法は非正則な問題には適用できない。実行可能な問題の実行可能領域を含むアフィン包の陽な表現を見出すことで、元の問題を正則な問題に変換することができる。いくつかの正則な問題を解いて上記のアフィン包を求める手続きが知られており、これを面縮小法と呼ぶ。以前代表者らは、弱実行不能半正定値計画問題の解析を行うために、無限方向抽出法という手法を開発し、弱実行不能問題の注目すべき特徴を明らかにした。後に、この方法は、双対問題に対する面縮小法を主問題の側から解釈していたものであることが判明した。問題の弱実行不能性の構成的判定と面縮小法との間には密接な関係があることを見出したことが研究代表者らの貢献であった。この成果を元に、任意の半正定値計画問題が内点法オラクルにより解けることを示した(学会発表13,原稿T3)。

本研究では、この立場からさらに研究を展開し、面縮小法を行うにあたり、凸錐が、非線形な凸錐と多面錐の直積で書ける場合についての面縮小法の考察を進め、この特殊な問題の構造を生かした面縮小法 FRA-poly を開発した(雑誌論文7,学会発表6,12)。FRA-polyにより、特に重要な2重非負行列錐(DNN錐)の場合について、面縮小を行い、問題を正則化するための計算複雑度が大幅に削減できることを示した。さらに、無限方向抽出法を用いて、主問題と双対問題に内点実行可能解が存在しない場合の双対ギャップについて検討を行った。主問題の最適値は、双対問題に対して線形等式制約を追加した問題の最適値となることを明らかにした(原稿T1,学会発表3)。一般に、線形等式制約を付加することで、問題の最適値が変化するので、主問題と双対問題が共に内点実行可能解をもたなければ、双対ギャップがほとんどの場合に存在することが明らかになった。本研究の寄与は、このような線形等式制約を陽に書き下したことにありと考えられる。直観的には明らかであるにせよ、測度論などと結び付けた“ほとんどの場合”のより厳密な数学的解析は今後の課題となる。

(B) Chubanovの新しい多項式時間解法の凸錐上の線形計画問題への拡張をはじめとする、悪条件の凸錐上の線形計画問題を解くための新解法の開発

凸錐上の線形計画問題を解くための新しい接近法として、近年 Chubanov によって提案された、線形計画法のための新しい多項式アルゴリズムを2次錐計画問題に拡張した(雑誌論文6,学会発表4,7)。このアルゴリズムは同次形対称錐線形計画問題の内点実行可能解を求める問題

に対する多項式時間アルゴリズムで、基本手続きと呼ばれる手続きを繰り返す。基本手続きは多項式時間で内点実行可能解を見つけるか、あるいは実行可能領域の存在する領域を狭める切除平面を求めることができる。切除平面が求められたら対称錐の自己同型群を用いて問題を基準形に戻す。この手続きを繰り返すことで内点実行可能解が存在する場合には、問題の条件数に関する多項式時間でそれを求めることができる。さらに、この方法を半正定値計画問題を含む一般の対称錐計画問題に拡張することにも成功した(雑誌論文 1, 学会発表 5,8)。引き続き、Chubanov のオラクルを用いた線形計画問題に対する多項式時間解法の拡張を行った。この方法は、線形不等式系の解を求めるために、各反復で「現在の反復点が、線形不等式系の解であるかないかを判定し、解でなければ、満たされていない不等式の一つを選択してくる」というオラクルを利用して、不等式系の解が存在する領域を、双対変数の空間で縮小していくものである。この方法が線形半無限計画問題に拡張できることを指摘し、結果として半正定値計画問題や 2 次錐計画問題に対して適用でき、多項式時間解法を構築できることを見出した(学会発表 1, 原稿 T2)。さらに、楕円体法をはじめとする既存の方法との比較を行うために、停止条件の比較検討を行った。その他、Steepest Edge ピボッティグルールを用いた単体法の反復回数の解析を行い(雑誌論文 2, 学会発表 2)簡単な射影に基づく新しいタイプの線形計画法の解法を提案した(雑誌論文 3)。

また、来日した最適化研究者 De Loera 氏(California 大学 Davis 校)との討論より、線形計画問題に対する中心曲線について、代数幾何的な立場から導出されたユークリッド幾何学的な意味での全曲率が次元の指数オーダーで大きくなる例題の存在を知り、情報幾何的な接近法により我々が導入した曲率と比較するための検討を進めた。情報幾何は悪条件の線形計画問題の構造を明らかにする上で有力な方法論となる。そのような立場も意識しつつ情報幾何の関連の研究を進め(雑誌論文 4, 学会発表 14)、正定値対称行列の情報幾何の概説も執筆した(雑誌論文 10,11,12)。

#### (C) 悪条件で大規模な凸錐上の線形計画問題を解くための数値計算手法の研究

悪条件かつ大規模な凸錐上の線形計画問題を解くための基礎として、内点法のための前処理付き共役勾配法の開発と線形計画法のための実装も行った。内点法の実装に共役勾配法をはじめとする Krylov 部分空間法を用いることは、従来より数多く試みられてきたが、特に反復最終段階での連立一次方程式が悪条件となることにより、困難であった。本研究では、速水(研究分担者)と保國によって開発された、定常反復法を前処理として用いることにより、世界で初めて Netlib ベンチマーク問題を反復法のみを用いて網羅的に解くことに成功した(雑誌論文 5, 学会発表 10,11)。このアルゴリズムは、行ベクトルの一次独立性を必要としないという点でも利点があり、今後さらに大規模問題や凸 2 次計画問題、半正定値計画問題等への活用が期待できるものである。

#### (D) モデリング等

得られた研究成果は、数理とアルゴリズムを中心とするものとなった。モデリングに関する研究に付いては、未だに進行中の部分が多いが、以下、現状と今後の展望について述べる。大規模グラフィカルモデル推定のためのアルゴリズムについては、高速化するために、疎性を利用した解のコレスキー分解の導入を検討して実装を進めつつある。また、密接に関連する、海洋データ同化に現れる、大規模共分散行列推定のためのベイズ型推定の研究を進めた(雑誌論文 9, 学会発表 9)。縮約された人工衛星データの線形計画問題による復元については、学習データが大量に存在することより、線形計画問題を用いた推定の誤差をさらに減少させるために、ニューラルネットや深層学習による復元を行うことを検討した。行列エントロピー関数最適化の多項式時間アルゴリズム(雑誌論文 8)の実装についても、検討はしたものの、実現には至らなかった。これらの問題については、論文を執筆するには至っていないが引き続き研究を進めている。また、最適化モデリングに関するモノグラフの編集(図書 1)を行った。

#### テクニカルレポートや原稿等

- [T1] Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “Duality Theorem in Semidefinite Programming Revisited: Another Analysis on Why Positive Duality Gaps Arise in SDP”, 最適化：モデリングとアルゴリズム 31, 統計数理研究所共同研究レポート No.420, pp.1-22, 2019 年 3 月.
- [T2] Masakazu Muramatsu, Tomonari Kitahara, Bruno F. Lourenço, Takayuki Okuno, Takashi Tsuchiya, “An Oracle-based Projection and Rescaling Algorithm for Linear Semi-infinite Feasibility Problems and its Application to SDP and SOCP”, arXiv:1809.10340, September 2018.
- [T3] Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “Solving SDP Completely with an Interior-point Oracle”, Optimization-online and arXiv:1507.08065, July 2015 (Revised: November 2015).

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 12 件)

1. Bruno F. Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “An

- Extension of Chubanov's Algorithm to Symmetric cones”, *Mathematical Programming*, Vol.173, 2019, pp.117-149, doi.org/10.1007/s10107-017-1207-7. (査読あり)
2. Masaya Tano, Ryuhei Miyashiro, and Tomonari Kitahara, “Steepest-edge Rule and its Number of Simplex Iterations for a Nondegenerate LP”, *Operations Research Letters*, Vol. 47, 2019, pp 151-156, doi.10.1016/j.orl.2019.02.003. (査読あり)
  3. Tomonari Kitahara and Noriyoshi Sukegawa, “A simple Projection Algorithm for Linear Programming Problems”, *Algorithmica*, Vol. 81, 2019, pp. 167-178, doi.org/10.1007/s00453-018-0436-3. (査読あり)
  4. Atsumi Ohara, “Conformal Flattening on the Probability Simplex and Its Applications to Voronoi Partitions and Centroids”, In *Geometric Structure of Information* (F. Nielsen, ed.), Chapter 4, pp.51-68, Springer 2019. (査読あり)
  5. Yiran Cui, Keiichi Morikuni, Takashi Tsuchiya and Ken Hayami, “Implementation of Interior-point Methods for LP Based on Krylov Subspace Iterative Solvers with Inner-iteration Preconditioning”, *Computational Optimization and Applications*, 2019, published on line, https://doi.org/10.1007/s10589-019-00103-y. (査読あり)
  6. Tomonari Kitahara and Takashi Tsuchiya, “An Extension of Chubanov's Polynomial-time Linear Programming Algorithm to Second-order Cone Programming”, *Optimization Methods and Software*, Vol. 33, 2018, pp1-25, doi.10.1080/10556788.2017.1382495. (査読あり)
  7. Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “Facial Reduction and Partial Polyhedrality”, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 28, 2018, pp.2304-2326, doi.org/10.1137/15M1051634. (査読あり)
  8. L. Faybusovich and T. Tsuchiya, “Matrix Monotonicity and Self-concordance: How to Handle Quantum Entropy in Optimization Problems”, *Optimization Letters*, Vol.11, 2017, pp 1513-1526. (査読あり)
  9. G. Ueno, G. and N. Nakamura, “Bayesian estimation of observation error covariance matrix in ensemble-based filters”, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, DOI: 10.1002/qj.2803, 2016. (査読あり)
  10. 小原敦美, 土谷隆, “正定対称行列の情報幾何(Ⅰ)”, *岩波データサイエンス*, 2巻, 2016年, pp.130-140. (査読なし)
  11. 小原敦美, 土谷隆, “正定対称行列の情報幾何(Ⅱ)”, *岩波データサイエンス*, 3巻, 2016年, pp.137-149. (査読なし)
  12. 小原敦美, 土谷隆, “正定対称行列の情報幾何(Ⅲ)”, *岩波データサイエンス*, 4巻, 2016年, pp.146-158. (査読なし)

〔学会発表〕(計 14 件)

1. Masakazu Muramatsu, Tomonari Kitahara, Bruno Lourenco, Takayuki Okuno and Takashi Tsuchiya, “An Oracle-based Projection and Rescaling Algorithm for Linear Semi-infinite Programming and its Application to Semidefinite Programming”, *International Symposium on Mathematical Programming*, 2018, University of Bordeaux, France.
2. Masaya Tano, Ryuhei Miyashiro, and Tomonari Kitahara, “On the Number of Simplex Iterations of the Steepest-edge for a Nondegenerate LP”, *International Symposium on Mathematical Programming*, 2018, University of Bordeaux, France.
3. ロウレンソ フィゲラ ブルノ, 村松正和, 土谷隆, “半正定値計画問題の双対定理再訪 主問題・双対問題共に内点実行可能解を持たない半正定値計画問題には「ほとんど確実に」非ゼロ双対ギャップが存在する”, *統計数理研究所共同研究集会“最適化:モデリングとアルゴリズム”*, 2018年3月, 政策研究大学院大学、東京.
4. 土谷隆, “最小二乗法と線形計画法 - モデリング・数理・アルゴリズムを巡るささやかな冒険 -”, *日本オペレーションズ・リサーチ学会 最適化の基盤とフロンティア研究部会(招待講演)*, 2017年, 筑波大学, 茨城.
5. Bruno F. Lourenco, Tomonari Kitahara, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “An Extension of Chubanov's Algorithm to Symmetric Cones”, *SIAM Conference on Optimization*, 2017, Sheraton Vancouver Wall Centre, Canada.
6. Bruno Figueira Lourenco, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya, “Partial Polyhedrality and Facial Reduction”, *SIAM Conference on Optimization*, 2017, Sheraton Vancouver Wall Centre, Canada.
7. Tomonari Kitahara and Takashi Tsuchiya, “An Extension of Chubanov's Polynomial-time Algorithm for Linear Programming to Second-order Cone Programming”, *SIAM Conference on Optimization*, 2017, Sheraton Vancouver Wall Centre, Canada.
8. 村松 正和, ロウレンソ ブルノ, 北原 知就, 土谷 隆, “同次対称錐計画問題の内点許容解を求める新しいアルゴリズム”, *数理最適化の発展 モデル化とアルゴリズム*, 2017年8月, 京都大学数理解析研究所, 京都.

9. G.Ueno, "Data Assimilation and Optimal Error Covariance", 2nd ISM-ZIB-IMI MODAL Workshop, September 25, 2017, Berlin.
10. Y.Cui, K.Morikuni, T.Tsuchiya and K.Hayami, "Implementation of Interior-point Methods for LP Based on Krylov Subspace Iterative Solvers with Inner-Iteration Preconditioning", 5th IMA Conference on Numerical Linear Algebra and Optimization, September 7-9th, 2016, University of Birmingham, U.K.
11. Keiichi Morikuni, Yiran Cui, Takashi Tsuchiya, Ken Hayami, "Implementation of Interior-Point Methods for LP using Krylov Subspace Methods Preconditioned by Inner Iterations", The 5th International Conference on Continuous Optimization (国際学会), 2016, 政策研究大学院大学, 東京
12. Bruno Figueira Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, "FRA-Poly: Partial Polyhedrality and Facial Reduction", The 5th International Conference on Continuous Optimization (国際学会), 2016, 政策研究大学院大学, 東京
13. Bruno Figueira Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya, "Solving SDP Completely with an Interior-Point Oracle", The 5th International Conference on Continuous Optimization (国際学会), 2016, 政策研究大学院大学, 東京.
14. Atsumi Ohara and Hideyuki Ishi, "Doubly Autoparallel Structure on the Probability Simplex, Information Geometry and its Applications", IGAI IV, Liblice, 2016, Czech Republic.

〔図書〕(計1件)

1. 山下浩 他, "モデリングの諸相: 数理科学とORの交叉点", シリーズ最適化モデリング(室田一雄, 池上敦子, 土谷隆 編), 第5巻, 2016年, 近代科学社.

〔産業財産権〕

特になし

〔その他〕

特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名: 小原 敦美

ローマ字氏名: Atsumi Ohara

所属研究機関名: 福井大学

部局名: 学術研究院工学系部門

職名: 教授

研究者番号(8桁): 90221168

研究分担者氏名: 速水 謙

ローマ字氏名: Ken Hayami

所属研究機関名: 国立情報学研究所

部局名: 大学共同利用機関等の部局

職名: 教授

研究者番号(8桁): 20251358

研究分担者氏名: 上野 玄太

ローマ字氏名: Genta Ueno

所属研究機関名: 統計数理研究所

部局名: モデリング研究系

職名: 教授

研究者番号(8桁): 40370093

研究分担者氏名: 北原 知就

ローマ字氏名: Tomonari Kitahara

所属研究機関名: 九州大学

部局名: 大学院経済学研究院

職名: 准教授

研究者番号(8桁): 10551260

### (2) 研究協力者

特になし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。