様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ２１ 日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2015～2019

課題番号：１５Ｈ０３６１４

研究課題名（和文）標準因子が自明な代数多様体の数理

研究課題名（英文）Arithmetic of algebraic varieties with trivial canonical bundle

研究代表者

桂　利行（Katsura, Toshiyuki）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任教授

研究者番号：４０１０８４４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,800,000円

研究成果の概要（和文）：Enriques曲面は19世紀末に見出された曲面であり、代数曲面の分類理論において１つのクラスを占める重要な曲面であるが、複素数体上では金銅誠之によって自己同型が有限なものは７つの型に分類されていた。標数が3以上の場合もMartinによって同様の分類がなされていた。本研究において最も複雑で難解な標数が２の場合の研究を行い、有限自己同型群を有する古典的Enriques曲面は８つの型に、超特異Enriques曲面は５つの型に分類できることを示した。正標数において9個のカスプ特異点を有するK3曲面の構造や超特異K3曲面のZariski性、準楕円曲面のファイバー構造についても新しい結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数曲面の組織的な研究は19 世紀末のイタリア学派の研究に始まり、複素数体上は小平邦彦による詳細な研究によってその分類を含む理論が構築された。1977年、BombieriとMumfordは正標数の代数的閉体上の代数曲面の分類理論を完成させ、標数2のEnriques曲面や準楕円曲面が明確に認識されるようになった。本研究はそれらの研究に基づき、有限自己同型をもつEnriques曲面の分類に決着をつけたものである。もう一つの研究対象となったK3曲面は、素粒子論で最近用いられている狭義のCalabi-Yau多様体の次元が最も小さい場合であるが、正標数においてその性質のいくつかを解明した。

研究成果の概要（英文）：Enriques surfaces were found at the end of 19 century, and they are important surfaces which belong to one class in the classification theory of algebraic surfaces. When their automorphism groups are finite, they were classified into 7 types over the complex number field by S. Kondo. G. Martin got a similar classification in characteristic p > 2. In our research, we studied Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2, and we showed that in the case of classical Enriques surfaces they are classified into 8 types and in the case of supersingular Enriques surfaces they are classified into 5 types. We also got some new results on the K3 surfaces with 9 cusp singularities, on the Zariski property of supersingular K3 surfaces, and on the fiber structures of the quasi-elliptic surfaces with Kodaira dimension 1.

研究分野：数学（代数幾何学）

キーワード：代数曲面　標準因子　Enriques曲面　準楕円曲面　自己同型群　正標数　K3曲面　nordal曲線

１．研究開始当初の背景

(1) 代数曲面の研究は、19 世紀末から 20 世紀初頭にかけてのイタリア学派の研究を嚆矢とし、複素数体上の場合には、1960 年代に小平邦彦によって詳細な研究がなされ、代数曲面の分類理論が厳密な理論として完成された。正標数の代数的閉体上の場合には、代数曲面の理論においても 1950 年代から 1960 年代にかけて複素数体上とは異なる様々な現象が見出されたが、1977 年に Bombieri と Mumford によって、その分類理論が構築された（②参照）。小平次元に基づいた分類理論において、小平次元が 0 の代数曲面は、Abel 曲面、K3 曲面、Enriques 曲面、超楕円曲面からなる興味深い曲面の類をなしている。Enriques 曲面は標数が 2 以外では K3 曲面を非分岐被覆として持ち、このことを利用して様々な性質が調べられていたが、標数 2 の場合は状況がかなり異なることが Bombieri と Mumford によって見出された。実際、彼らは、Enriques 曲面が、特異、古典的、超特異 Enriques 曲面の３種類に分かれることを示した。有限自己同型群をもつ Enriques 曲面は、複素数体上の場合は 1980 年代後半に、金銅誠之によって７つの型に分類された（④参照）。そこでは、Nikulin や Vinberg による格子理論が重要な役割を演じている。しかし、正標数の場合には、有限自己同型群をもつ Enriques 曲面の分類問題は、未解決の問題として残されていた。自己同型群の構造についても、向井茂、浪川幸彦、Nikulin、Peters、Dolgachev 等によって様々な研究がなされていたが、正標数の場合には未解決な問題が多く残されていた。

(2) １次元の場合、代数曲線が単有理的であることと有理的であることは同値であり、この事実はリューローの定理と呼ばれている。定義から有理的であれば単有理的であるが、この逆が成り立つかという問題は古くから考えられていた。代数曲面の場合、標数 0 では単有理な代数曲面が有理曲面になることは Castelnuovo の有理性判定条件を用いて容易に示せる。しかし、正標数においてこの定理が成り立たない例が 1959 年に Zariski によって見出された（⑥参照）。彼が発見したのは、有理的ではないが次数が標数 p と一致する純非分離的拡大によって有理曲面になる曲面であり、このような曲面は Zariski 曲面と呼ばれるようになった。Zariski 曲面をはじめ単有理曲面を特徴づけようという試みが、Artin、Rudakov、Shafarevich、塩田徹治、島田伊知朗などによってなされていた。超特異 K3 曲面が単有理曲面であろうという問題は Artin-塩田予想として正標数の K3 曲面の大きな問題として未解決であり、さらに強く、超特異 K3 曲面がいつ Zariski 曲面であるかという問題も興味深い問題となっていた。実際、標数 $p=2$ の場合には超特異 K3 曲面はすべて Zariski 曲面であることが 1977 年に Rudakov と Shafarevich によって示されている。

(3) 標数が 2 でなければ、16 個の A_1 特異点を有する K3 曲面は Kummer 曲面になることは 1970 年代に Nikulin によって示されていた。同様の問題として、9 個のカスプ特異点を持つような K3 曲面は、複素数体上では 1990 年初頭に Barth によって研究され（①参照）、Abel 曲面との関係が明らかにされていた。彼は、2 次元複素ベクトル空間を格子群で割った曲面として Abel 曲面をとらえ、K3 曲面との関係を調べたが、正標数の代数的閉体上ではこのような方法を用いることはできず、9 個のカスプ特異点を有する K3 曲面の構造を研究することは未解決問題として残されていた。

(4) 小平次元が 1 の楕円曲面 X の m 重標準線形系がどのような時に種数１のファイバー空間の構造を与えるかという問題は 1970 年代に飯高茂によって研究され、解析的な楕円曲面に対してはmが 86 以上であれば小平次元が１の任意の楕円曲面に対してそのような構造を与え、86 がその最小値であることが示されていた（③参照）。1980 年代から 90 年代にかけて、正標数の場合に対しても上野健爾と研究代表者によって研究され、標数が３以上の場合には $m=14$ が最小値であり、標数 $p=2$ の場合には $m=12$ が最小値であることが示されていたが、小平次元が１の準楕円曲面に対する同様の問題は未解決問題として残されていた。

２．研究の目的

(1) 有限自己同型群を持つ Enriques 曲面を任意の標数に対して分類し、このような Enriques 曲面の分類理論を完成させ、その有限自己同型群の構造を決定することが目的となる。

(2) 超特異 K3 曲面が Zariski 曲面になる場合を調べ、K3 曲面に対し、単有理性、Zariski 性、超特異性の３者の関係を明確にする。

(3) 正標数において、9 個のカスプ特異点を有する K3 曲面の構造を調べ、位数 3 の自己同型を有する Abel 多様体との関係を明確にし、複素数体上で知られている Barth の結果がどこまで成立するか明らかにする。さらに、そのような K3 曲面に対し、正標数特有の現象を見出す。

(4) 小平次元１の準楕円曲面に対して、多重標準線形系が種数１のファイバー空間の構造を与

える最良の条件を見出すことが目的となる。そのために、与えられた性質を有する準楕円曲面を構成する手法を見出す。

３．研究の方法

(1) 代数曲面の理論を駆使して Enriques 曲面の解析を行い、Neron-Severi 群の格子構造に関するする Nikulin や Vinberg 等によって得られた代数曲面の自己同型群が有限になる条件を用いる。Enriques 曲面はすべて種数１の曲線のファイバー構造（楕円曲面、または準楕円曲面の構造）を持つが、その相対 Jacobi 多様体は有理曲面になることが Bombieri と Mumford によって示されている。また、自己同型群が有限であることから相対 Jacobi 多様体の断面のなす群も有限になることがわかる。このような楕円曲面は W. Lang によって、準楕円曲面は伊藤浩行によって分類されているので、その分類理論を用いて与えられた性質を有する Enriques 曲面を構成する。手法としては、正標数において、Rudakov-Shafarevich によって開発されたベクトル場による商空間構成理論を用いる(⑤参照)。標準被覆が特異点を有しているために conductrix があらわれるが、conductrix は Ekedahl と Shepherd-Barron によって分類されているので、分類の各類に属する conductrix からスタートして種数１のファイバー構造を調べ、我々の Enriques 曲面の分類がすべてを尽くしていることを示す。

(2) 超特異 Abel 曲面の対合による商空間である Kummer 曲面が Zariski 曲面であるかどうかをべるところから始め、それを一般化していく。２個の超特異楕円曲線の商空間として得られる Kummer 曲面が Artin 不変量１の K3 曲面として特徴付けられることを用い、扱いやすい Artin 不変量１の超特異 K3 曲面を構成することによって Zariski 性を調べる。さらに、構造が調べやすい楕円曲面の形にして解析を進める。

(3) 正標数における Abel 曲面の自己準同型環の構造や代数曲面の理論を用いて、位数３の自己同型を有する Abel 曲面の商として得られる曲面の構造を解析する。また、曲面の非存在を示すには格子の構造定理を用いる。

(4) 正標数の代数曲面の交点理論を用いるとともに、Rudakov-Shafarevich によるベクトル場の商空間の理論を用いて、得られた数値が最良であることを示す準楕円曲面を構成する。

４．研究成果

(1) 有限自己同型群を持つ Enriques 曲面は、標数が 3 以上の場合、および標数 2 で特異 Enriques 曲面の場合には、その後 G. Martin によって、複素数体上の場合とほぼ同様に分類できることが示された。本研究では、残されていた最も複雑な場合である標数 2 の古典的 Enriques 曲面と超特異 Enriques 曲面の場合の分類を行い、有限自己同型群をもつ Enriques 曲面の nordal 曲線の configuration による分類を完全に完成させた。具体的には、古典的な場合は 8 つの型に、超特異の場合には５つの型に分類できた。これまで得られていた場合は、出てくる configuration は複素数体上で現れるものとすべて同じであったが、我々が研究した標数 2 の古典的 Enriques 曲面、超特異 Enriques 曲面の場合は、VII 型以外は複素数体上では現れないものが出現することが特筆すべき点である。標数 2 の古典的、または超特異 Enriques 曲面の場合には、標準被覆は特異点を有するが、K3 曲面と同様の不変量を有する K3-like 曲面とよばれる曲面になり、その被覆は特異点を解消すると K3 曲面ではなく有理曲面になることがある。その結果、準楕円曲面の構造を持つような Enriques 曲面が存在し、このことが他の標数とは違う現象が現れる原因となっている。また、その各類に属する Enriques 曲面の自己同型群の構造も与えた。自己同型群として、他の標数の場合には現れない四元数群や、位数 11、7 の巡回群が現れる例も構成できた。この成果は、１篇目は金銅誠之との、２篇目は金銅誠之と G. Martin との共同研究であるが、本研究課題の最大の成果であり、総計約 100 ページの共著論文として出版された。

(2) 標数 p が 3 以上で 12 を法として１でなければ超特殊 Kummer 曲面が Zariski 曲面であることの巧妙な証明を与えた。また、超特殊 Kummer 曲面の Artin 不変量は１であるが、Artin 不変量が 2 や 3 の超特異 K3 曲面にも Zariski 曲面になるものが存在することを示した。p=13 は 12 を法として１であるが、この時にも超特殊 Kummer 曲面が Zariski 曲面になることが示せたので、我々が得た成果は、超特殊 Kummer 曲面が任意の標数 p に対して Zariski 曲面になるという予想をサポートしている。この研究は M. Schuett との共同研究である。

(3) 複素数体上の場合と同様に、標数 p が 3 以外で正の場合も、9 個のカスプ特異点をもつ K3 曲面は、位数 3 の自己同型をもつ Abel 曲面を 3 次被覆に持つことが示せた。その K3 曲面が超特異であれば、この曲面の Artin 不変量は１か、または 2 かつ p が 3 を法として-1 になるか、のどちらかになるという結果も得た。また、単純な Abel 曲面が平行移動ではない位数 3 の自己同型を持つ時、その商空間は必ず 9 個のカスプ特異点を有する K3 曲面になることも証明できた。この研究も M. Schuett との共同研究である。

(4) 小平次元が１の任意の準楕円曲面に対して、p=3 のとき m 重標準線形系は m が 6 以上の時に

は種数１のファイバー空間の構造を与えることを示した。また、具体的なベクトル場を見出しそれによる商曲面を考えることによって、楕円曲線を底曲線とし特異ファイバーとして１個だけ順な重複ファイバーを有する準楕円曲面を構成し、m=6 がそのような数値の最小値であることを示した。これによって、小平次元１の代数曲面のファイバー空間としての構造が明確になった。

<引用文献>

① W. Barth, K3 Surfaces with Nine Cusps, Geom. Dedic., 72 (1998), 171--178.

② E. Bombieri and D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char. p, III, Invent. math., 35 (1976), 197--232.

③ S.Iitaka, Deformations of compact complex surfaces, II, J. Math. Soc. Japan, 22 (1970), 247-261.

④ S.Kondo, Enriques surfaces with finite automorphism groups,,Japanese J. Math., 12 (1986), 191-286.

⑤ A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Inseparable morphisms of algebraic surfaces, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 40 (1976), 1269--1307.

⑥ O.Zariski, On Castelnuovo's criterion of rationality p_a=P_2=0 of an algebraic surface,Illinois Journal of Mathematics, 2 (1958), 303--315.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Toshiyuki Katsura and Shigeyuki Kondo	４．巻 27
２．論文標題 Enriques surfaces in characteristic 2 with a finite group of automorphisms	５．発行年 2018年
３．雑誌名 J. Algebraic Geometry	６．最初と最後の頁 173－202
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/jag/697	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Toshiyuki Katsura and Matthias Schuett	４．巻 36
２．論文標題 Zariski K3 surfaces	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Revista Matematica Iberoamericana	６．最初と最後の頁 869－894
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/RMI/1152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Toshiyuki Katsura, Shigeyuki Kondo and Gebhard Martin	４．巻 7
２．論文標題 Classification of Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Algebraic Geometry	６．最初と最後の頁 390－459
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14231/AG-2020-012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Toshiyuki Katsura and Matthias Schuett	４．巻 225
２．論文標題 K3 surfaces with 9 cusps in characteristic p	５．発行年 2021年
３．雑誌名 J. Pure and Applied Algebra	６．最初と最後の頁 accepted
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2020.106558	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計22件（うち招待講演　19件／うち国際学会　12件）

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Construction of numerically trivial automorphisms of Enriques surfaces in characteristic 2
3．学会等名 Research Seminar, Leibnitz Univ. Hannover, Germany, September 4.（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Automorphism groups of Enriques surfaces with quasi-elliptic fibration in characteristic 2
3．学会等名 Conference on Differential, Algebraic and Topological Methods in Complex Algebraic Geometry, Cetraro, Italy, September 10（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Classification of Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2
3．学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry Seminar, University of Amsterdam, The Netherlands, September 5（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Zariski K3 surfaces
3．学会等名 第17回名古屋国際数学コンファレンス 「K3 surfaces and Related Topics」, 名古屋大学, December 20.（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Classification of Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2
3．学会等名 11th Conference of Arithmetic and Algebraic Geometry 2018, Univ. Tokyo, January 23.（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura.
2．発表標題 Enriques surfaces in characteristic 2
3．学会等名 Summer School 2016 of the IRTG "Moduli and Automorphic Forms", Vlieland, The Netherlands, August 31.（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 Classification of Enriques surfaces with finite automorphism groups in characteristic 2
3．学会等名 New Trends in Arithmetic and Geometry of Algebraic Surface, Banff, Canada, March 17.（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Toshiyuki Katsura
2．発表標題 正標数の代数幾何学
3．学会等名 2017年（第20回）日本数学会代数学賞受賞特別講演、日本数学会，March 26.（招待講演）
4．発表年 2017年

１．発表者名
Toshiyuki Katsura

２．発表標題
Classification of Enriques surfaces with finite automorphism groups in characteristic 2

３．学会等名
Algebraic Geometry Conference, Hotel Libero, Busan, Korea, March 29.（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Toshiyuki Katsura

２．発表標題
Configurations of smooth rational curves on superspecial K3 surfaces in small characteristics

３．学会等名
Algebraic Geometry Conference (IMPANGA 15), Banach International Mathematical Center, Bedlevo, Poland, April 17.（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2015年

１．発表者名
Toshiyuki Katsura

２．発表標題
On a classification of Enriques surfaces with finite automorphism groups

３．学会等名
Conference on K3 Surfaces and Related Topics, Korea Institute of Advanced Studies (KIAS), Korea, November 17.（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2015年

１．発表者名
Toshiyuki Katsura

２．発表標題
On the classification of Enriques surface with finite automorphism group

３．学会等名
Conference on Theory and Applications of Supersingular Curves and Supersingular Abelian Varieties, RIMS Conference [Zoom], 京都大学, 10月13日.（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	金銅　誠之 (Kondo Shigeyuki)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
The 10th Conference on Arithmetic and Algebraic Geometry	2016年～2016年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Leibniz University Hanover	Munchen University		