

令和元年6月3日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H03618

研究課題名(和文) シンプレクティック微分リー代数の構造とモジュライ空間の特性類

研究課題名(英文) Structures of symplectic derivation Lie algebras and characteristic classes of moduli spaces

研究代表者

逆井 卓也 (Sakasai, Takuya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60451902

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,300,000円

研究成果の概要(和文)：研究組織3名の共同研究により、リーマン面やグラフのモジュライ空間のコホモロジー群の構造とその応用に関して次の結果を得た：

(1) 階数7のグラフのモジュライ空間の1次元有理ホモロジー群に関する Bartholdi の結果の別証明を与えた。(2) Johnson 像と呼ばれるリー代数の構造を次数7まで決定した。(3) Torelli 群に付随する2つの降下列を次数6まで比較し、ホモロジー3球面の有限型不変量に関する新たな知見を得た。併せて Johnson 核の有理アーベル化を決定した。(4) Gwenael Massuyeau 氏と共に、曲面のホモロジー同境界群の有理アーベル化の非自明性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン面のモジュライ空間は100年以上の研究の歴史を持つ数学的対象であり、この空間の構造を調べることが新たな数学を生み出す原動力となってきた。グラフのモジュライ空間もまた、類似の空間としてその重要性が注目されている。それらの空間の不変量である特性類を見つけることは、それらを測るための新たな「尺度」を作ることであり、その応用は数学にとどまらず数理物理など広範囲にわたると期待される。本研究では、いくつかの特性類の直接計算や、種々の特性類の関係性を統一的に記述するための方法を与えた。それらの応用として、3次元多様体の新たな不変量の構成や、既存の不変量に関する新たな知見を得た。

研究成果の概要(英文)：As joint works of the members of our research team, we obtained the following results concerning the cohomology groups of moduli spaces of Riemann surfaces and graphs:

(1) We gave another proof of Bartholdi's result on the 11th rational homology group of the moduli space of graphs of rank 7. (2) We determined the structure of the Lie algebra of Johnson images up to degree 7. (3) We compared certain two filtrations of the Torelli group up to degree 6. This result provides a new insight on the finite type invariants of homology 3-spheres. Also, we determined the rational abelianization of the Johnson kernel. (4) In a joint work with Gwenael Massuyeau, we proved that the rational abelianization of the homology cobordism group of surfaces is non-trivial.

研究分野：トポロジー

キーワード：トポロジー モジュライ空間 グラフホモロジー Johnson 準同型 シンプレクティック微分

## 1. 研究開始当初の背景

2次元実多様体である有向曲面に複素構造という幾何構造を付与したものをリーマン面と呼ぶ。一般に1つの曲面には相異なる複素構造が無数に存在し、それらはリーマン面のモジュライ空間と呼ばれる1つの空間をなす。この空間は世界中の数学者による100年以上もの長い研究の歴史をもつ重要な空間であり、その取り組みが新たな数学を生み出す原動力にもなってきた。リーマン面のモジュライ空間の有理コホモロジーは、曲面の写像類群と呼ばれる曲面の対称性を記述する群の有理コホモロジーと等価であることが知られている。それにより各有理コホモロジー類は有向曲面束の特性類としての解釈を持ち、多様体の分類理論への寄与を与える。分担者(森田)は今日 Miller-Morita-Mumford 類 (MMM 類)と呼ばれる一連の特性類を定義し、その代数的独立性の証明を通じてモジュライ空間の特性類の研究の端緒を開いた。

モジュライ空間は位相幾何的な組み合わせ構造を持つことが知られており、その構成要素はグラフを用いて記述される。グラフが数学において果たす役割は多岐にわたるが、そのひとつとして古典群の表現論における表現空間の不变部分の記述に用いられている。それらのグラフによる記述の関係を深く観察することで、Kontsevich は結合型のシンプレクティック微分リー代数と呼ばれる無限次元シンプレクティックリー代数「 $a$ 」のホモロジー群とモジュライ空間の有理コホモロジー群の間に同型対応が存在するという衝撃的な結果を与えた。また、これらの1次元アナロジーとして、Culler と Vogtmann により計量グラフのモジュライ空間と呼ばれる空間が構成されている。この場合に対応する群は自由群の外部自己同型群によって与えられる。Kontsevich の定理はこの場合にも適用され、計量グラフのモジュライ空間の有理コホモロジー群はリー型のシンプレクティック微分リー代数「 $h$ 」のホモロジー群と対応する。これまでの様々な研究により、モジュライ空間の有理コホモロジーの安定部分については決定がなされているものの、安定類である MMM 類の非安定域での振る舞いや、非安定類の具体的構成(豊富に存在することは証明されている)については知られていないことが多く、更なる研究が求められていた。

リー代数  $h$  は曲面のホモロジー同境界群「 $H$ 」を通じて、3, 4次元多様体論の観点からも重要な役割を果たす。この群  $H$  の構造に関して代表者はこれまでに共同研究を含めて様々な研究を行ってきたが、アーベル化の決定(有理アーベル化が非自明か否か)など、いくつかの重要問題が残されていた。

## 2. 研究の目的

上記の状況の下、モジュライ空間のコホモロジー群の構造やその応用に対して以下のような多角的アプローチを設定していた。

(1) 結合型のシンプレクティック微分リー代数  $a$  のオイラー数の生成関数の漸近挙動: これまでの研究において、モジュライ空間の同変オイラー数に関する Gorsky の公式を用いて、オイラー数の漸近的振る舞いに関する興味深い現象を観察し、それを数学的に記述する予想を定式化していた。その予想を証明し、現象が確かに存在することを明らかにする。

(2) 階数 7, 8 の計量グラフのモジュライ空間の有理ホモロジー群の決定: 計量グラフのモジュライ空間の組み合わせ構造の理論から代数的データを抽出し、計算機を用いてホモロジー群の直接計算を行う。

(3) リー型のシンプレクティック微分リー代数  $h$  の詳細構造の解明: リー代数  $h$  の構造を理解する上でアーベル化を調べることは目下の中心的課題となっているが、結合型のリー代数  $a$  のアーベル化の決定に用いた手法は  $h$  の場合に適用するのが難しいことが経験的に分かっており、別のアプローチが必要となっている。そこで、これまでの表現論的手法に加え、分担者(森田)によって定義され、 $h$  への応用法が見出しているシンプレクティックテンソル空間の不变部分の標準内積の理論を用いて  $h$  の詳細な構造の解明を行う。並行して Johnson 像と呼ばれる  $h$  の部分リー代数の構造に注目し、具体的な計算を通じて構造を決定していく。

(4) 曲面のホモロジー同境界群を通じた3次元多様体の不変量の構成: リー代数  $h$  は曲面のホモロジー同境界群  $H$  から自然な方法で構成されるリー代数とみなすことができる。Gwénaél Massuyeau 氏との共同研究で得られた「一般化森田トレース準同型」を用いて群  $H$  の構造を調べ、この準同型の3次元多様体論へ応用していく。

## 3. 研究の方法

(1) リー代数  $a$  のオイラー数の解析については、モジュライ空間のオイラー数の導出を行った Harer-Zagier, Penner, Smillie-Vogtmann の証明(行列模型の理論やグラフの数え上げの手法)を再検討し、漸近展開の手法を習得した。これらの手法を用いて予想の証明を試みた。

(2) 計量グラフのモジュライ空間の有理ホモロジー群の直接計算については、(1) で習得したグラフの数え上げの手法を用いてアルゴリズムを構成し、具体的な計算プログラムを構成することを試みた。

(3) 正の次数付きリー代数  $h$  の中で次数 1 部分によって生成される部分リー代数を決定することは曲面の写像類群に対する有理 Johnson 準同型の像を決定することと同等であることが知られており、その決定が重要な問題となっている。 $h$  の構造については、他の理論的考察が停滞している中でも進めていくことのできる計算が多く、着実に計算を実行していった。

(4) 研究発表や情報収集のために Strasbourg 大学 (フランス)、Copenhagen 大学 (デンマーク)、Oberwolfach 数学研究所 (ドイツ) などを訪問し、そこで行われた研究集会において現地の研究者や集会の参加者と議論を行い様々な知見を得た。また、河澄響矢氏 (東京大学) や中村博昭氏 (大阪大学)、Gwénaél Massuyeau 氏 (Bourgogne 大学) Christine Vespa 氏 (Strasbourg 大学) と共同で 2017 年 5 月に国際研究集会「Johnson 準同型とその周辺」を開催し、当分野に関連する研究者たちと活発な研究交流を行った。とくに、この集会で得られた知見が研究成果に繋がっている。本研究結果については国内外での様々な研究集会で発表を行い、また代表者は広島大学 (2015 年 11 月)、京都大学 (2016 年 1 月)、大阪大学 (2017 年 12 月) での集中講義を通じ、研究内容とその背景の紹介を行った。

#### 4. 研究成果

研究代表者の逆井と研究分担者の森田茂之、鈴木正明との共同研究により以下の研究成果を得た。

(1) 結合型のリー代数  $a$  のオイラー数の漸近的振る舞いについて、リーマン面のモジュライ空間の場合との比較を行いつつ考察を進めた。とくに、行列模型などの数理物理的な手法との関連に注目し、沖縄科学技術大学院大学 (OIST) で開催された集会などで収集した情報を活用して、オイラー数の公式の書き換えを行い、予想の証明を試みたが、残念ながら最終的な結果には至らなかった。

(2) 2015 年に Copenhagen 大学において行われた自由群の自己同型群に関する集会において外部自己同型群の有理ホモロジー群に関する講演や情報交換を行い、階数 7, 8 の計算について議論したが、その集会の参加者であった Bartholdi 氏によって集会後間もないうちに階数 7 の場合の計算結果が発表された。そこには予想外の非自明なコホモロジー類の存在が示されており、それまでの研究計画や理論の全体像の構想の変更を余儀なくされた。そこで、とくに予想外であった 11 次元有理ホモロジー群の階数が 1 であるという事実について、その別証明をシンプレクティック微分リー代数のアーベル商の計算を通じて与えた。今回の結果を受け、階数 7 で起きた現象が階数 8 以上の場合にも起こるかを調べることは興味深い問題となったが、計算量の増大に応じた効率的な計算アルゴリズムを見出すことができず、今後の課題である。

(3) リー代数  $h$  の構造解明については、第 6 Johnson 準同型の余核に現れていた新たな種の成分について、その存在の組織的な証明法を見出し、具体的な計算を実行した。これにより第 7 Johnson 準同型の場合にも、新たな種の余核成分が現れることを示し、像と余核を決定することができた。この余核成分の位相的意味を調べることは今後の課題である。第 8, 9 Johnson 準同型の像についてもほぼ決定できているが、下からの評価として現段階の結果を捉えたときに、それは Garoufalidis と Getzler による Torelli リー代数の構造に関する予想公式から導かれる結果と一致しており、これまでの計算結果がそのまま求める最終結果となることが十分に期待される。

(4) シンプレクティック群の表現論を用いた写像類群のトートロジー環の構造の研究について、拡大 Johnson 準同型が誘導するコホモロジー間の写像に注目し、Manivel の意味での表現安定性との関連を調べた。それにより、表現論的に解析が可能な定義域において、トートロジー環で予想されている現象と同様の形を持つ事実が証明できた。この現象が誘導写像を通じて、トートロジー環の構造にどのくらい影響を与えているかどうかを調べることは今後の課題である。また、写像類群、自由群の外部自己同型群や対応するモジュラー群の関係性に注目し、それぞれの群において定義されている特性類を Borel regulator class の観点から整理した。後者の成果については論文

[Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki](#), Secondary characteristic classes for subgroups of automorphism groups of free groups. (arXiv:math.AT/1512.06365, 2015 年).

にまとめてプレプリントとして発表した。

(5) Gwénaél Massuyeau 氏との共同研究において、曲面のホモロジー同境界群の一般化森田トレース準同型をリー代数  $\mathfrak{h}$  のアーベル商の結果と組み合わせることにより、一般の種数に対するホモロジー同境界群  $H$  の有理アーベル化が非自明であることを示した。証明は種数 1 とそれ以上の場合で大きく異なり、前者についてはリー代数の種数 1 特有の構造を用い、後者については前述の Bartholdi の結果を Kontsevich の定理を通じて再解釈するものとなっている。この結果の系として、曲面のホモロジー同境界群, sutured manifold としての加法的かつ 4 次元ホモロジー同境界不変な有限型不変量が得られた。

(6) 写像類群の重要な部分群である Torelli 群の降中心列から決まる降下列と Johnson 準同型から決まる降下列の比較を次数 6 まで行った。その系として、ホモロジー 3 球面の次数 6 までの有理数値有限型不変量が本質的に Casson 不変量と Johnson 準同型によって表されるという事実を証明した。また、研究集会「Johnson 準同型とその周辺」において得られた知見と、これまでの計算結果を組み合わせることで、Torelli 群の部分群である Johnson 核の有理アーベル化の最終決定をすることができた。更に研究を続け、その有理アーベル化写像の具体的記述を無限小 Dehn-Nielsen 準同型を用いて与えることができ、Johnson 核の特殊な生成元に関する簡明な計算結果を求めることができた。本成果については論文

Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology spheres. (arXiv:math.GT/1711.07855, 2017 年).

にまとめてプレプリントとして発表した。

(7) 2 面体群作用で不変な  $a$  の部分リー代数の構造を調べ、その 2 次元ホモロジー群が非自明であることを証明した。この結果について論文にまとめたが、他の研究者からの指摘を踏まえ、更なる結果の拡張と幾何学的意味を明確にすることが必要となっている。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

- (1) Gwénaél Massuyeau, Takuya Sakasai, Morita's trace maps on the group of homology cobordism, Journal of Topology and Analysis, 印刷中, (2018), 査読有り.
- (2) 逆井 卓也, 曲面の写像類群と自由群の外部自己同型群のコホモロジーに関するこれまでの歩みと最近の進展, 数学 70, (2018), 225-254, 査読有り.
- (3) Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra, Experimental Mathematics 27, (2018), 302-315, 査読有り.
- (4) Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, Symmetry of symplectic derivation Lie algebras of free Lie algebras, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B66 (2017), 185-193, 査読有り.
- (5) Takuya Sakasai, Johnson-Morita theory in mapping class groups and monoids of homology cobordisms of surfaces, Winter Braids Lecture Notes 3, (2016), Course no IV 1-25, 査読有り.
- (6) Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, Masaaki Suzuki, Structure of symplectic invariant Lie subalgebras of symplectic derivation Lie algebras, Advances in Mathematics 282 (2015), 291-334, 査読有り.

[学会発表](計 48 件)

- (1) 逆井 卓也, グラフホモロジー: 定義と応用, Encounter with Mathematics (第 73 回), 2019 年.
- (2) Takuya Sakasai, Topological studies of moduli spaces of Riemann surfaces and their generalizations, Quantum Math, 2019 年.
- (3) Masaaki Suzuki, Two filtrations of the Torelli group, East Asian Conference on Geometric Topology 2019, 2019 年.
- (4) Shigeyuki Morita, Motivic Lie algebra and cohomology of moduli spaces of graphs and curves, Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds, 2018 年.

- (5) 鈴木 正明, Two filtrations of the Torelli group, トポロジーとコンピュータ 2018, 2018 年.
- (6) 逆井 卓也, Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology 3-spheres, トポロジー火曜セミナー, 2018 年.
- (7) Takuya Sakasai, Computations on Johnson homomorphisms, Cohomological study of mapping class groups and related topics, 2018 年.
- (8) Masaaki Suzuki, Computations on Johnson homomorphisms, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, 2018 年.
- (9) 逆井 卓也, グラフホモロジーとモジュライ空間のホモロジー群, 種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用, 2018 年.
- (10) Shigeyuki Morita, (Non-)triviality of characteristic classes on flat bundles, B School III, 2018 年.
- (11) Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups - crossing number, genus, The 13th East Asian School of Knots and Related Topics, 2018 年.
- (12) 逆井 卓也, (1) The mapping class group action in shear coordinates, (2) Mapping class group actions on moduli spaces of 3d gravity, モジュライ空間のシンプレクティック幾何, 2018 年.
- (13) 逆井 卓也, Additive invariants of homology cobordisms of surfaces, 大阪大学大学院理学研究科数学専攻・理学部数学科 談話会, 2017 年.
- (14) 逆井 卓也, 自由群の acyclic closure とその自己同型群について, ストリングトポロジーとその周辺, 2017 年.
- (15) 逆井 卓也, Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces, 北海道大学大学院理学研究院数学部門 幾何学コロキウム, 2017 年.
- (16) Shigeyuki Morita, Characteristic classes of flat bundles and invariants of homology spheres, Topology and Geometry of Low-dimensional manifolds 2017, 2017 年.
- (17) Takuya Sakasai, Invariants of homology cobordisms of surfaces, Tsuda University Topology Workshop, 2017 年.
- (18) Shigeyuki Morita, Torelli group versus invariants of homology spheres and beyond, Johnson homomorphisms and related topics, 2017 年.
- (19) Takuya Sakasai, Johnson homomorphisms and symplectic representation theory, Johnson homomorphisms and related topics, 2017 年.
- (20) Takuya Sakasai, Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces, Geometric Topology Fair 2017, 2017 年.
- (21) 逆井 卓也, Homologically fibered knots and closed 3-manifolds, 筑波大学トポロジーセミナー, 2017 年.
- (22) 森田 茂之, Casson invariant and structure of the mapping class group, Casson 不変量に関わる 3 次元多様体の不変量, 2017 年.
- (23) 逆井 卓也, On the dihedral invariant Lie subalgebra of the associative symplectic derivation Lie algebra, GD2016-微分同相群と離散群, 2016 年.
- (24) 逆井 卓也, Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces, トポロジー火曜セミナー, 2016 年.
- (25) 逆井 卓也, An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra, トポロジーとコンピュータ 2016, 2016 年.
- (26) Shigeyuki Morita, Characteristic classes of homological surface bundles and four-dimensional topology, Topology and Geometry of Low-dimensional manifolds 2016, 2016 年.
- (27) Takuya Sakasai, Topological approaches to Mumford-Morita-Miller classes, MCM 2016, 2016 年.
- (28) 森田 茂之, モジュライ空間の特性類 ~リーマン面, グラフ, ホモロジー同境~, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 総合講演, 2016 年.
- (29) 森田 茂之, 逆井 卓也, 鈴木 正明, An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 一般講演, 2016 年.
- (30) 逆井 卓也, Cohomology of the moduli space of graphs and groups of homology cobordisms of surfaces, 離散群と双曲空間のトポロジーと解析, 2016.
- (31) Takuya Sakasai, Johnson-Morita theory I, II, III, Winter Braids VI: School on braids and low-dimensional topology, 2016 年.
- (32) 逆井 卓也, Convex polytopes from fatgraphs, 位相的漸化式入門, 2016 年.
- (33) 逆井 卓也, 自由群の外部自己同型群の有理コホモロジーについて, 京都大学理学研究科/理学部数学教室談話会, 2016 年.
- (34) 逆井 卓也, シンプレクティック微分リー代数とモジュライ空間のコホモロジー, 広島大学大学院理学研究科数学専攻談話会, 2015 年.

- (35) Takuya Sakasai, Structure of symplectic invariant Lie subalgebras associated with symplectic derivation Lie algebras, Workshop on Automorphisms of Free Groups, 2015 年.
- (36) Masaaki Suzuki, Integral Euler characteristic of the outer automorphism groups of free groups, Workshop on Automorphisms of Free Groups, 2015 年.
- (37) Takuya Sakasai, Structure of the Lie algebra of associative symplectic derivations, RMT 2015, 2015 年.
- (38) Shigeyuki Morita, Cohomology of automorphism groups of free groups, Topology and Geometry of Low-dimensional manifolds 2015, 2015 年.
- (39) Takuya Sakasai, Tautological algebras of mapping class groups and representation theory, MCM 2015 Autumn, 2015 年.
- (40) 森田 茂之, 逆井 卓也, 鈴木 正明, Tautological algebra of mapping class group and representation theory, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 一般講演, 2015 年.
- (41) 森田 茂之, 微分同相群とトポロジー ～特性類と不変量を中心として～, 第 62 回トポロジーシンポジウム, 2015 年.
- (42) 逆井 卓也, 写像類群の安定コホモロジー群について, 種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用, 2015 年.
- (43) 逆井 卓也, 曲面の写像類群にまつわる話題, 無限群と幾何学の周辺, 2015 年.
- (44) Takuya Sakasai, On homology cobordisms of surfaces of genus 1, 離散群と双曲空間の幾何と解析, 2015 年.
- (45) Takuya Sakasai, On homology cobordisms of surfaces of genus 1, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, 2015 年.
- (46) Masaaki Suzuki, Non-meridional epimorphisms between knot groups, Topology, Geometry and Algebra of low dimensional manifolds, 2015 年.
- (47) Shigeyuki Morita, Tautological algebras of moduli spaces -survey and prospect-, Geometry and Algebra of low dimensional manifolds, 2015 年.
- (48) 森田 茂之, 低次元トポロジーの謎 ～曲面およびグラフの族の特性類～, 大阪市立大学談話会, 2015 年.

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：森田 茂之

ローマ字氏名：(MORITA Shigeyuki)

所属研究機関名：東京大学

部局名：大学院数理科学研究科

職名：名誉教授

研究者番号（8 桁）：70011674

研究分担者氏名：鈴木 正明

ローマ字氏名：(SUZUKI Masaaki)

所属研究機関名：明治大学

部局名：総合数理学部

職名：専任教授

研究者番号（8 桁）：70431616

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。