

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15H03619

研究課題名(和文) 曲面と3次元多様体が相互に絡むトポロジー

研究課題名(英文) Topology related with surfaces and 3-mainfolds

研究代表者

小島 定吉 (Kojima, Sadayoshi)

東京工業大学・情報理工学院・教授

研究者番号：90117705

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、曲面と3次元多様体が交錯する研究の現状を念頭に、曲面の写像類の不変量、部分群の分離性、トポロジーにおける計算について理解を深めることを目指した。とくに、写像類の曲面のトポロジーに依らない比較を主要な目標とした。そして、曲面の擬アノソフ型自己同型写像類の正規化された位相的エントロピーとその写像トーラスの双曲体積の比が、曲面のトポロジーに依らない正定数で下から抑えられることを証明した。

研究成果の概要(英文)：The surface theory and the theory of 3-manifold are linked each other. The aim of this study is to deepen understandings between them especially on invariants of mapping classes, separability of subgroups and computing in topology. In particular, we would have liked to develop comparisons of invariants of mapping classes which do not depend on the topology of surfaces. We then have proved that the normalized entropy of a pseudo-Anosov over the volume of its mapping torus is uniformly bounded from below by some explicit positive constant.

研究分野：トポロジー

キーワード：3次元トポロジー 幾何構造 位相不変量 計算機支援 体積 2次特性類

1. 研究開始当初の背景

曲面、すなわち2次元多様体、のトポロジーは種数で分類されることがメビウスによりすでに1870年代に証明されていた。にも関わらず、曲面から派生する新たなトポロジカルな構造の理解に、数学、物理学、生命科学等の分野で現在も多くの研究が進行中である。

あとを追う3次元多様体のトポロジーの研究は19世紀末のポアンカレに始まる。1970年代半ばにはジェイコー・シャーレン・ヨハンセンによるJSJ分解理論が完成し、これを元にサーストンが幾何化予想を定式化したのが1982年である。3次元多様体の世界の鳥瞰図を記すこのワイルドな予想は2003年にペレルマンによりハミルトンが創始したリッチ流を用いて解決された。しかしながらその証明は曲率という局所的概念の制御のみに依っており、多様体の大域的トポロジーの理解にはさらなる研究が必要であることが指摘されている。

一方、曲面と3次元多様体という次元を違えた両者の研究は、実は互いに深く関連している。たとえば、曲面があればその写像類を指定すると写像トーラスとして3次元多様体を得られる。また任意の3次元多様体は適当に埋め込まれた曲面によりハンドル体の和に分解できる。こうした中で研究代表者は、曲面の写像類の共役類の複雑度を測る実数値不変量の中で、とくに擬アノソフ類に対し位相的エントロピーと写像トーラスの双曲体積の関係について研究を進めており、一連の成果を得ていた。

2. 研究の目的

本研究は、研究代表者のこれまでの成果を基に曲面と3次元多様体を互いに絡め、その相互作用が産み出す新たなトポロジー研究の展開を目指すものである。このやや漠然とした目標を頭に置き、曲面と3次元多様体が絡む状況で、取り組むべき対象として以下の三項目を設定した。

- (1) 曲面の写像類の不変量：
写像類の共役不変量の曲面のトポロジーによらない比較を探求する。とくに、擬アノソフ写像類の位相的エントロピーとその写像トーラスの体積に注目する。
- (2) 部分群の分離性：
幾何学的群論の立場から分離性の有用性を見直し、空間と基本群の通約性を関連させた研究を展開する。
- (3) トポロジーにおける計算：
曲面と3次元多様体が絡む各種計算のアルゴリズムを構築し、コンピュータ上に精度保証を繰り返し実装して実験数学的研究に取り組む。

本研究は理論研究のため研究の進捗状況は事前には推し量ることがなかなか難しいので、これらの三つの項目は平行して進めるこ

ととした。

3. 研究の方法

2に記した三つの項目各々について、研究の具体的目標と方法・計画を記す。なお、項目(1)については申請時すでにたいへん具体的な目標設定ができていたこと、項目(2)については問題群は列挙したものの、どのように取り組むかは研究開始時点では白紙だったこと、項目(3)については計算の具体的対象は本研究の開始後決めたことを記しておく。

(1)「曲面の写像類の不変量」については、申請時点での準備状況を基に、写像類のエントロピーに曲面のオイラー標数をかけて正規化したエントロピーと写像トーラスの体積の比は、曲面のトポロジーに依らない定数で下から抑えられるか、という明確な具体的課題を設定していた。さらに当初は手法として、シュレンカーが定義し研究を進めた繰り返し込み体積を用いて、擬フックス群の凸芯の体積の評価を与え、指定された擬アノソフ写像の両側反復で定義される擬フックス群の両側極限の体積の増大度に帰着させるというストーリーで計画していた。

(2)「部分群の分離性」については、最近の幾何学的群論の進展を背景に、スペシャル群の周辺で四つの課題を設定した。たとえばスペシャル群の部分群が分離的になるための幾何学的に簡明な十分条件を求める、いかなる群に対して強ティッツ排反が成立するか、などである。研究代表者は研究開始時点では幾何学的群論について総体的理解は十分とは言えなかったため、研究分担者からの支援を得ると共に、大学院の講義で幾何学的群論をテーマに取り上げ、知識獲得を加速させることも計画した。

(3)「トポロジーにおける計算」については、SnapPeaなどのこの分野で広く利用されている各種計算プログラムを、正井秀俊氏(研究協力者)の協力を得て精度保証計算の立場から見直すことを計画した。

以上の研究計画の遂行のために、ポスドクを2年6ヶ月間雇用した。

一方、研究分担者同士の学術的情報共有と相互啓発を意識して研究連絡を極力日常的に行うように努めた。また、研究組織外からの情報収集のため、関連研究者を短期間招へいして集中的討論を逐次実施した。さらに、研究成果の公開および情報収集のため関連研究集会の開催を主催あるいは共催により支援し、自ら研究集会への参加にも務めた。

4. 研究成果

ここでは3年の研究期間で得られた成果を設定した三つの項目に分けて記し、最後に総括する。

(1) 曲面の写像類の不変量：

当初の計画通り、曲面の擬アノソフ型写像類に対し、その正規化されたエントロピーと

写像トラスの双曲体積の比は、曲面のトポロジに依らない正定数で下から抑えられる、という命題に証明を与えることができた。さらにシャープか否かは現時点では確定できないが、その定数の明示的例示を与えることができた。これはグルノーブル大学のマックシェーン氏との共同研究である。

この成果は、本研究の初期の時期に証明の道筋とある程度の詳細は出来上がっていたのだが、議論の中で用いたシュレンカーによる擬フックス群の凸芯の体積の繰り込み体積による評価について専門家から疑念が上がり、その修復に数ヶ月を要した。さらに擬アノソフ写像の両側反復による擬フックス群の凸芯の体積の増大度に関する議論を埋める必要が生じ、これにも時間を要した。これらの修復はマックシェーン氏との協働による。最終的に論文として出版されたのは今年になってからである。

一方、この研究は一定数の研究者の興味を集め、我々はエントロピーというタイヒミュラー空間上のタイヒミュラー移動距離について議論したが、より未知な事が多いヴェイユ・ピータンソン移動距離に関していくつかの関連研究が現れた。

さらに今後の方向性として、エントロピーと体積の比較と言う課題に対して確率論的視点からのリビン氏の過去の予想があり、これに関し最近ウォルデン氏が興味深い実験観察を与え、両者の関係の理解を一層深める示唆が得られている。

(2) 部分群の分離性：

この項目に関しては、本研究申請時にランダムにあげた課題の中で強ティツツ排反に関して小さな進展が得られた。群が強ティツツ排反を満たすとは、任意の有限生成部分群は可解な有限指数部分群を持つか、階数2以上の自由群に全射をもつ有限指数部分群を持つときをいう。ワイズ氏によりスペシャルキューブ複体の基本群がこの性質を持つことが予想され、これが本研究の一つの課題であったのだが、最近ブレグマン氏によりワイズの予想に証明が与えられた。そのためブレグマン氏の証明を精査し、トポロジの手法を用いて証明を大幅に簡略化し、京都大学での集中講義で解説した。

(3) トポロジにおける計算：

本研究申請時には各種計算アルゴリズムの実装について精度保証の技法を取り込むことだけを立案し、計算の具体的対象は絞っていなかった。研究開始後、計算の具体的対象として、タイヒミュラー空間上の擬アノソフ写像の作用の L_p ノルムに関する移動距離を取り上げ、試行計算をするための理論的準備を進めた。とくに $p=2$ のヴェイユ・ピータンソン計量の場合に計算の手法のめどはつけたが未だ完成には至っておらず、研究は現在も進行中である。

本研究申請時に記した三つの項目に対し、全体として概ね期待通りの成果が得られて

いると考えている。とくに(1)に記した成果については、大きな波及効果があった。また、研究分担者による関連研究については紙面の都合で省略する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計17件)

1. S. Kojima and G. McShane, Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs, *Geom. & Topol.*, 査読有, 22 (2018), 2403-2426.
2. M. Bestvina and K. Fujiwara, Handlebody subgroups in a mapping class group, *Contemporary Math.*, 査読有, 696 (2017), 29-50.
3. S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, Symmetry of symplectic derivation Lie algebras of free Lie algebra, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, B66 (2017), 185-193.
4. S. Morita, T. Sakasai and M. Suzuki, An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra, *Experimental math.*, 査読有, 印刷中
5. K. Fujiwara and M. Kapovich, On quasimorphisms with noncommutative targets, *Geom. Funct. Anal.*, 査読有, 26 (2016), 478-519.
6. M. Bestvina, K. Bromberg and K. Fujiwara, Stable commutator lengths of mapping class groups, *Ann. Inst. Fourier*, 査読有, 66 (2016), 871-898.

[学会発表](計48件)

1. S. Kojima, On the moduli space of equilateral plane pentagons, NUS-IMS Workshop on geometric structures and representation variety, 招待講演, NUS, Singapore (2017).
2. 小島定吉, ペンタゴン, 千葉大学先進科学センター・オムニパスセミナー, 招待講演, (2017) (千葉)
3. K. Fujiwara, Quickly generating a nice hyperbolic element, Geometric and probabilistic properties of infinite groups, 招待講演, Lille, France (2017)
4. K. Fujiwara, How to quickly generate hyperbolic elements, Geometric structures in group theory, 招待講演, Oberwolfach, Germany (2017).
5. T. Sakasai, Johnson homomorphisms and symplectic representation theory, Workshop on Johnson homomorphisms and related topics, 招

- 待講演，東京大学，(2017)
6. 小島定吉，Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs，招待講演，京都大学数学教室談話会，(2016)
 7. K. Fujiwara，Mapping class groups in geometric group theory，招待講演，Colloquium at University of Warwick，(2016)
 8. T. Sakasai，Topological approaches to Mumford-Morita-Miller classes，招待講演，MCM (2016)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

小島 定吉 (KOJIMA, Sadayoshi)
東京工業大学・情報理工学院・教授
研究者番号：9 0 1 1 7 7 0 5

(2)研究分担者

高沢 光彦 (TAKASAWA, Mitsuhiro)
東京工業大学・情報理工学院・助教
研究者番号：8 0 3 2 3 8 2 2

逆井 卓也 (SAKASAI, Takuya)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：6 0 4 5 1 9 0 2

藤原 耕二 (FUJIWARA, Koji)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：6 0 2 2 9 0 7 8