

令和 3 年 6 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03623

研究課題名(和文)作用素環の対称性と部分因子環

研究課題名(英文)Symmetries of operator algebras and subfactors

研究代表者

泉 正己 (Izumi, Masaki)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：80232362

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,800,000円

研究成果の概要(和文)：Cuntz 環の方法により、near-group 圏や一般化 Haagerup 圏の構造定数の満たす方程式を導出した。これを使ってこれらの圏の外部自己同型群の構造を決定し、equivariantization や de-equivariantization の操作を施して得られるフュージョン圏の構造を決定した。Pimsner 環のゲージ群の KMS 状態から生成される因子環の完全不変量を決定した。Cuntz 環の連続場の研究を行い、poly-Z 群の Cuntz 環への作用の個数を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素環は無限次元かつ非可換という著しい特性をもつ数学的对象であり、このような特性を持つ数学的あるいは物理的な対象のモデルとしても資するものである。作用素環の構造の理解のためには対称性の理解が重要であり、本研究では作用素環の対称性の理解を進展させる複数の結果が得られた点で学術てきな意義を持つ。対称性として数学で古くから研究されている群作用に加え、近年量子対称性の名でも呼ばれているフュージョン圏の研究を進展させた点においても重要である。

研究成果の概要(英文)：We deduced a system of equations satisfied by structure constants of near-group categories and generalized Haagerup categories by using Cuntz algebras. As applications, we determined the structure of the outer automorphism groups, and the fusion categories obtained by equivariantization and de-equivariantization. We obtained a complete invariant for the factors arising from KMS-states for gauge actions of the Pimsner algebras. We studied continuous fields of the Cuntz algebras, and determined the number of actions of poly-Z groups on the Cuntz algebras.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 フュージョン圏 群作用 部分因子環 分類空間

1. 研究開始当初の背景

Hilbert 空間の有界作用素から成る共役演算に関して閉じた代数で、ノルム位相に関して閉じたものを C^* 環、弱作用素位相に関して閉じたものを von Neumann 環と呼ぶ。作用素環とはこれらの総称である。可換な作用素環の構造定理から、 C^* 環は位相空間の、von Neumann 環は測度空間のそれぞれ非可換版とみなされる。作用素環論は 1930 年代に Murray-von Neumann による創始された当初より量子物理学、表現論、エルゴード理論などの諸分野とかわりを持って発展してきたが、近年では Connes の提唱した非可換幾何学の延長線上で、大域解析学、特に離散群論との関係も顕著である。本研究の重要なキーワードの 1 つである対称性は、従来数学において群作用としてとらえられてきた。作用素環論においても群作用の研究は、次に述べる二つの理由により 1960 年代以降作用素環論の中心的研究課題の一つである。

量子論において、観測可能量は Hilbert 空間上の自己共役作用素により記述される。そのため必然的に、物理系の対称性は作用素のなす環の自己同型写像や反自己同型写像として記述される。作用素環論による量子場の理論や量子統計力学の数学的定式化は 1960 年代に行われたが、上記の理由により、それ以来多くの数理論理学者が作用素環上の群作用の研究に参入し、作用素環の観点から見ても重要な成果をもたらしている。

Connes は 1970 年代に単射的因子環の分類に着手し、 III_1 型の場合を除いて分類を完成させた。因子環とは中心がスカラーのみである von Neumann 環であり、一般の von Neumann 環の基本的構成要素である。彼の分類理論の最も大きな特徴は、環の分類をある特定の環上の整数群の作用の分類に帰着するところにある。このことは、環の構造を理解する上で自己同型群の構造がいかに重要かを物語っており、実際このような例は枚挙に暇がない。単射的因子環の分類は、1980 年代後半に Haagerup により完成されたが、これは II 型因子環への実数群の作用についての問題の解決と同値であった。

これら作用素環の古典的テーマは、von Neumann 環の研究においては離散従順群の作用の分類理論を経て Jones の部分因子環理論に受け継がれた。Jones は 1980 年代に II_1 型因子環の部分因子環の指数の概念を導入し、指数有限の因子環の分類問題を提唱した。これは作用素環におけるガロワ理論とも言えるものであったが、ガロワ群に相当するものは群の世界には収まりきらなかった。その後の研究で、現在フュージョン圏と呼ばれるある種のテンソル圏がガロワ群の対応物であることが明らかになった。まさにこの理由により、部分因子環の理論は低次元トポロジーや共形場理論と密接な関係を持ち、実際結び目の多項式不変量である Jones 多項式が部分因子環の研究を通して発見されたのだ。研究代表者は 1990 年代前半から部分因子環の分類の研究を行ってきており、特に Cuntz 環による部分因子環やフュージョン圏の構成においては Haagerup カテゴリーの Drinfeld 中心を決定するなど独創的な研究を行ってきた。

一方 C^* 環においては環自体の分類理論の発展が進行中であった。Elliott は 1970 年代半ばに有限次元 C^* 環の帰納極限である AF-環の K-理論による分類を行ったが、その後の発展のためには Kaparov の KK 理論が整備されるのを待つ必要があった。1990 年代に入り再び Elliott が AT 環の分類理論を発表して以来、核型 C^* 環の K 理論による分類理論は爆発的な発展を遂げた。2010 年代に入って佐藤康彦と松井宏樹のブレイクスルー的研究により、この分類理論は最終段階を迎えている感があった。このことは C^* 環において対称性の研究を行うための準備が整ってきたともいえる。研究代表者は 2000 年頃から、有限群コホモロジーを持つ作用の分類や、松井宏樹との Z^2 の Kirchberg 環への作用の分類で独創的な研究を行っていた。

2. 研究の目的

本研究の主な目的は、様々な方法を駆使して作用素環の構造を支配する対称性を研究を行うことである。より具体的には次の 2 つのテーマに取り組んだ。

(1) 部分因子環とフュージョン圏の分類の研究。

指数 4 未満の部分因子環の分類は 1990 年代半ばまでに Jones, Ocneanu, Popa, 河東泰之、申請者により完成した。これらは基本的に量子群や共形場理論に現れるフュージョン圏に対応する。この結果は最近指数 5 以下の場合に拡張されたが、そこには他の分野には表れないフュージョン圏が登場する。このような研究の中で注目を集めたのが、申請者が導入した Cuntz 環による部分因子環の構成法である。この方法は量子群などから構成できない多くの部分因子環を与える一方で、Drinfeld 中心の計算にも有効である。本研究の目的は、Cuntz 環の方法を組織的に発展させることにより、near-group 圏と呼ばれているフュージョン圏とその一般化である 2 次圏の分類を行い、その結果として対応する部分因子環を分類することである。本研究の独

創的な点は、部分因子環の構成と同時に対応するフュージョン圏の構造定数も完全に決定できる点にあり、このようなことは他の部分因子環の構成法では不可能である。

(2) Kirchberg 環への poly-Z 群の作用の研究。

単射的因子環への離散従順群の作用の分類は既に完成している一方で、核型 C^* 環への群作用の分類は申請者達により始まったばかりと言える。そのような状況で Kirchberg 環と呼ばれる K 理論での環の分類が最も成功しているクラスから群作用の分類に着手するのは自然である。松井宏樹と申請者はこれまでの研究から次の予想を提唱した：

“その分類空間が有限次元であるような可算従順群の Kirchberg 環への外部的作用は K 理論的な不変量により分類可能である”。本研究開始前までに Hirsch length(コホモロジー次元)³までの poly-Z 群に対して、この予想はほぼ確かめられていたが、本研究の目的は、一般の poly-Z 群に対してこの予想の証明を確立することである。

3. 研究の方法

(1) 部分因子環とフュージョン圏の分類の研究。

Cuntz 環の方法で代表者がこれまでに扱ったクラスよりも広いクラスの 2 次圏について構造定数の満たす方程式を導出する。計算機を利用してこの方程式の解を求めフュージョン圏を分類すると同時に Drinfeld 中心の計算を行い、その重要な不変量であるモジュラデータを具体的に求める。さらに更にそれらのモジュラデータに現れるパターンを見つけ、モジュラデータを支配している代数的構造を理解する。

(2) Kirchberg 環への poly-Z 群の作用の研究。

Kirchberg 環の自己同型群の構造を理解するため、安定化の自己同型群のループ群と連続漸近中心環のユニタリ群の位相の関係を明らかにする。これにより、一般に難しいとされる自己同型群の解析をユニタリ群の解析帰着することができる。さらにホモトピー論における基本的な概念であるホモトピー固定点を使い、1 次や 2 次のコサイクルがいつコバンダリになるかを位相的に特徴づけ、群作用の分類理論における重要な道具であるコホモロジー消滅定理を得る。

4. 研究成果

(1) Cuntz 環を用い、重複度が大きい near-group 圏を完全に分類するための方程式を導出した。それを用いて、外部自己同型群の決定法を確立し、equivariantization や de-equivariantization の操作を施して得られるフュージョン圏を決定した。

(2) Cuntz 環を用いて、偶數位数の有限可換群に付随する一般化 Haagerup 圏を完全に分類するための方程式を導出した。それを用いて外部自己同型群の決定法を確立し、equivariantization や de-equivariantization の操作を施して得られるフュージョン圏を決定した。位数 4 の群の場合にこの結果を適用することにより、指数 $3 + \sqrt{5}$ の部分因子環で中間因子を持たないものをすべて構成できることを示した。Pinhas Grossman と Noah Snyder と共同で、この構成を $Z_4 \times Z_2$ に適用することにより Asaeda-Haagerup 因子環の新しい構成法を確立した。

(3) Poisson 境界の理論を用いて、Pimsner 環のゲージ作用の Kubo-Martin-Schwinger 状態から生成される因子環の完全不変量である荷重の流れの記述を行った。この結果を使い、 III_0 型因子環が現れる例が存在することを示した。またこの構成と記号力学系の極小シフトとの関係を示した。

(4) 曾我部太郎と共同で、Cuntz 環の連続場の研究を行い、Dadarlat の先行研究において仮定されていた条件が不要なことを示した。また、Cuntz 環の自己同型群をターゲットとするホモトピー集合が非可換群になる例を構成し、Cuntz 環の自己同型群の分類空間が H 空間の構造を持たないことを示した。

(5) 松井宏樹と共同、Kirchberg 環上の poly-Z 群の分類に関する予想をほぼ解決した。上記の研究と本研究を組み合わせることにより、Cuntz 環上の poly-Z 群の作用の数を決定した。本研究は大掛かりなものであるため、4 部の論文に分けて発表する必要があり、それぞれの論文で細部を詰め公開する作業は本研究以降の研究に持ち越された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 M. Izumi, T. Sogabe	4. 巻 30
2. 論文標題 The group structure of the homotopy set whose target is the automorphism group of the Cuntz algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1950057
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X19500575	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 M. Izumi	4. 巻 3
2. 論文標題 The classification of 3^n subfactors and related fusion categories	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Quantum topology	6. 最初と最後の頁 473,562
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/113	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 P. Grossman, M. Izumi, N. Snyder	4. 巻 743
2. 論文標題 The Asaeda-Haagerup fusion categories	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal für die Reine und Angewandte Mathematik	6. 最初と最後の頁 261,305
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/crelle-2015-0078	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Masaki Izumi	4. 巻 357
2. 論文標題 The flow of weights and the Cuntz-Pimsner algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 203-229
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-017-2948-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaki Izumi	4. 巻 46
2. 論文標題 A Cuntz algebra approach to the classification of near-group categories	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 CMA Proceedings	6. 最初と最後の頁 222-343
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 A topological approach to the classification of discrete amenable group actions on nuclear C^* -algebras
3. 学会等名 Operator Algebras and Applications (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 The flow of weights and the Cuntz-Pimsner algebras
3. 学会等名 Approximation Properties in Operator Algebras and Ergodic Theory (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 Five infinite families of potential modular data related to quadratic categories
3. 学会等名 Fusion Categories and Subfactors (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 泉 正己
2. 発表標題 Topics in K-theory of operator algebras: Dadarlat-Pennig's generalization of Dixmier-Douady theory and group actions on Kirchberg algebras I,II
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 泉 正己
2. 発表標題 The classification of poly-Z group actions on Kirchberg algebras I,II
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 Group actions on C^* -algebras and obstruction theory
3. 学会等名 Seminar, Issac Newton Institute
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 An operator algebra approach to the classification of certain fusion categories I,II,III
3. 学会等名 The Fourteenth Annual Spring Institute on Noncommutative Geometry and Operator algebras (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 Indecomposable characters of infinite dimensional groups associated with operator algebras
3. 学会等名 International conference on structure of C^* -algebras and tracial approximation (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 An operator algebra approach to the classification of certain fusion categories I,II,III
3. 学会等名 Operator Algebras and Mathematical Physics (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 Noncommutative Poisson boudaries and Cuntz algebra states
3. 学会等名 Special Week on Operator algebras (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 Quadratic categories
3. 学会等名 International Conference on Subfactor Theory in Mathematics and Physics (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Masaki Izumi
2. 発表標題 The classification of fusion categories via operator algebras
3. 学会等名 International Meeting and the Annual Meeting of the Taiwanese Mathematical Society (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	河東 泰之 (Kawahigashi Yasuyuki) (90214684)	東京大学・大学院数理科学研究科・教授 (12601)	
連携研究者	小澤 登高 (Ozawa Narutaka) (60323466)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	
連携研究者	木田 良才 (Kida Yoshikata) (90451517)	東京大学・数理科学研究科・教授 (12601)	
連携研究者	佐藤 康彦 (Sato Yasuhiko) (70581502)	九州大学・数理学研究院・准教授 (17102)	
連携研究者	コリンズ ブノワ (Collins Benoit) (20721418)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	松井 宏樹 (Matui Hiroki) (40345012)	千葉大学・理学研究院・教授 (12501)	
連携研究者	岡安 類 (Okayasu Rui) (70362746)	大阪教育大学・教育学部・准教授 (14403)	
連携研究者	植田 好道 (Ueda Yoshimichi) (00314724)	名古屋大学・多元数理研究科・教授 (13901)	
連携研究者	戸松 玲治 (Tomatsu Reiji) (70447366)	早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授 (32689)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Operator Algebras and Mathematical Physics	開催年 2016年～2016年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
オーストラリア	University of New South Wales		
米国	Indiana University		