

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：12102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06069

研究課題名(和文) 学校数学における方程式の学習指導を改善する方法の開発

研究課題名(英文) Improving the teaching and learning equations in school mathematics

研究代表者

榎本 哲士 (ENOMOTO, Satoshi)

筑波大学・人間系・特任研究員

研究者番号：60758811

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、学校数学における方程式の学習指導を改善するために、方程式の中の文字の見方による生徒の困難性の特定とその要因の解明を目指す。その中でも、二元一次方程式に関する仮説的な学習プロセスに着目し、方程式の見方を「相等関係」から「関数関係」へと変換することによって方程式の中の文字の見方を「未知数」から「変数」へと変換する必要がある場面を分析した。その分析を通じて、方程式と関数の学習の関連について検討し、一貫した文字の意味で学習指導する必要性を示した。

研究成果の概要(英文)：The teaching and learning algebra should be central to school mathematics. However, the content of algebra is difficulty for many students. The overall purpose of this study is to improve the teaching and learning algebra for breaking through this situation. In particular, this study focuses a hypothetical learning process leading to liner equation with two unknown. We analyse the scene in which students must change the liner equation of "equality" into the liner equation of "functional relationship" in textbook. Through that analysis, we examined the relationship between equations and function, and showed the necessity of consistent guidance of teaching in the sense of letters in equations.

研究分野：数学教育学

キーワード：二元一次方程式 一次関数 変数 文字 数学的概念の二面性

1. 研究開始当初の背景

方程式とは、未知数を表す文字を含んだ相等関係に関する等式である。方程式を解くことにより、その条件を満たす値を的確に求めることができる。そのため、方程式は、数学に限らず日常における様々な問題を解決する有効な道具として用いられる (Kieran, 1997)。

上記のような役割と機能を持つ方程式は、文字と記号を駆使して発展してきた現代の数学において多様に解釈されるようになった (Sfard & Linchevski, 1994)。例えば、方程式 $2x + y = 3$ は、「ある数 x を 2 倍しある数 y を加えると 3 になるという計算の過程」や、「 $2x + y$ という値と 3 は等しいという相等関係」、あるいは「 x を決めたら y がただ一つに決まるという関数関係」として解釈することが可能なのである。このように指摘した上で Sfard ら (1994) は、数学的概念の二面性に基いた概念形成理論である reification 理論を用いて、代数史の分析を行った。

その分析結果から、代数はその歴史上、二つの焦点の移行を有しているということが明らかになった。一つ目の焦点の移行は「計算の過程」から「方程式」への移行であり、二つ目の焦点の移行は「方程式」から「関数」への移行である。第一の移行では未知数としての文字の導入により、文字式が計算の過程だけではなく、その結果 (プロダクト) も同時に表すことになる。一方、第二の移行では、方程式の表す数量関係の見方が「相等関係」から「関数関係」へと変更され、それに伴い方程式の中の文字の見方も「未知数」から「変数」へと変更される。

Sfard ら (1994) は、上記のような焦点の移行が学校数学の中にも存在すると述べ、この移行が生徒にとって困難であるという理論的仮説を主張した。実際に、第一の移行における生徒の困難性は我が国の博士論文においても取り上げられ研究が進められている (例えば、杜, 1992; 藤井, 2000)。しかしながら、第二の移行における生徒の困難性については具体的な生徒の実態が報告されておらず、十分に研究が進められているとは言えない。

上記した第二の移行に関連する生徒の困難性について、近年の全国学力・学習状況調査において、驚くべき生徒の実態が明らかになった。全国学力・学習状況調査において、「二元一次方程式を一次関数を表す式とみること」を評価する問題が出題された。この問題の正答率は 36.7% と低かった。この問題において、二元一次方程式のグラフを直線ではなく、図 1 のような離散的な点のグラフと解答する生徒が全体の 41.9% を占めていた。この生徒の実態は上記した Sfard らの理論的仮説に合致するものであり非常に興味深く、科学的に究明する必要がある。

筆者は上記した生徒の実態に関する質問

紙調査を実施した (榎本, 2010)。その結果、困難性を保持する生徒は二元一次方程式と一次関数の区別を式の形式 (陽関数表記あるいは陰関数表記) によって行っており、柔軟に見方を変更することができないという結論を得た。この結果は Sfard らの理論的な仮説を実証データによって補完するものであった。このような研究成果をさらに精緻化し、生徒の困難性を多面的に把握するために、本研究では以下の目的により進める。

2. 研究の目的

本研究は、学校数学における方程式の学習指導を改善するために、以下の 2 点について明らかにする。

第 1 の目的は、方程式の見方を「相等関係」から「関数関係」へと変換する場面に焦点を当て、方程式の中の文字の見方を「未知数」から「変数」へと変換する際に生起する困難性及び、その要因を数学的概念の二面性を視点として特定することである。

第 2 の目的は、第 1 の目的において明らかにした困難性を解消し、生徒の理解を促進する方法に欠くことのできない条件を明らかにする。

3. 研究の方法

本研究は、上述の目的を達成するために、以下の二つの研究課題に計画的かつ組織的に取り組んだ。

- 1) 生徒の困難性について学習指導要領・検定教科書の内容の系統をもとに理論的に考察した。
- 2) 困難性を解消し、生徒の理解を促進する学習指導の方法に欠くことのできない条件を上記 1) の結果をもとに理論的に考察した。

本研究では、構成主義の立場から、特定の数学領域における子どもの思考と学習を記述し、授業やカリキュラムを設計するための基盤として提唱された「仮説的学習軌道 (Hypothetical Learning Trajectory)」 (Simon, 1995) を用いる。仮説的学習軌道とは、「学習の目標」「計画された学習活動」「学習プロセスに関する仮説」から構成されるものである。このうち、「学習の目標」を学習指導要領から、「計画された学習活動」を検定教科書から、「学習プロセスに関する仮説」を Sfard ら (1994) の理論的仮説からそれぞれを把握し、分析した。その結果から、生徒の理解を促進するための学習指導の際に欠くことのできない要件を導き出した。

4. 研究成果

- 1) 方程式及び整式の見方に関する理論的考察
数学学習において、代数史と同様に方程式

やその中の文字の見方が変容する局面を特定するために、数学的概念の二面性に関連する文献を精読するとともに、「仮説的学習軌道」(Simon,1995)を用いて、学習指導要領と検定教科書の内容を分析した。

具体的には、学習指導要領と検定教科書より方程式及び整式の見方に関わる「学習の目標」と「計画された学習活動」を抽出し、数学的概念の二面性(操作と構造)を視点に分析を行った。理論的考察の対象は、「数と式」領域で取り扱われる整式、方程式の学習プロセスと、「関数」領域で取り扱われる「方程式を関数を表す式とみること」に関わる学習プロセスである。

理論的分析の結果、Sfard と Linchevski (1994)の主張する焦点の移行を学校数学において特定することができ、教科の特性である系統性の中に式の見方の変容を特定することができた。その中でも特に、「関数」領域で学習指導される「二元一次方程式を関数を表す式とみる」ことの学習プロセスに特徴的な結果を得た。

それは、「二元一次方程式を関数を表す式とみる」見方には二通りの見方が存在するということである。この結論は、数学的概念の二面性を視点とすることで明らかになった。

数学的概念の二面性に基づくと、関数概念にも操作的な捉え方と構造的な捉え方があり得る。この捉え方それぞれから式の見方について考察を行ったのである。

二元一次方程式を関数を表す式とみる際の二通りの見方とは、関数の操作的な捉え方から二元一次方程式をみる見方と関数の構造的捉え方から二元一次方程式をみる見方である。関数の操作的捉え方から二元一次方程式をみる際には、二元一次方程式の中の文字 x に数値を代入し、 y の値を求める活動が行われる。対して、関数の構造的捉え方から二元一次方程式をみる際は、二元一次方程式を y について解き、 $y = ax + b$ から一次関数のグラフの特徴(傾き、切片)を読み取る活動が行われる。

この理論的考察により、仮説的な学習プロセスに潜在しているプロセスプロダクトジレンマ (Sfard & Linchevski, 1994) や本研究が焦点化する文字の見方の変更に関わる教科内容を教材レベルで特定することができた。つまり、文字に対する困難性のうち数学的概念の二面性に起因するものに影響を及ぼし得る教材を明らかにしたのである。

2) 実態調査に向けた仮説の生成

上述したように、「二元一次方程式を関数を表す式とみる」見方には二通りの見方が存在する。それは、関数概念を保持する者がどのように捉えているのか(関数の操作的捉え方か構造的捉え方)に依存するものである。

これは、数学的概念の二面性という立場から、関数概念に関する生徒の理解が操作的な理解に留まり、構造的な理解に至っていない

という Sfard (1992) の指摘にも関連する。つまり、「二元一次方程式を関数を表す式とみる」ことは、二元一次方程式という式表現の中に関数概念を映し出すことであるため、映し出す関数概念が理想的に構造的コンセプションまで形成されていなければ映し出すことは不可能になると予想することができる。

以上のことから、筆者は次のような仮説を生成した。それは、生徒が関数を操作的に捉えているのか、あるいは構造的に捉えているのかによって、生徒の選択する二元一次方程式のグラフに差異が生じるのではないだろうか、というものである。

関数を一つのモノ(対象)としてみる構造的な捉え方に対して、関数の操作的な捉え方は、 x の値と y の値の対応という見方でみられ、式やアルゴリズムをもとにして変数の値ごとの計算に焦点が当てられる。

もし生徒がこのような関数の操作的な捉え方に留まっていた場合、関数について順序対の集合全体としての把握には至らず、ある一つの順序対に焦点化して把握してしまうことが考えられる。それゆえ、関数の操作的な捉え方に留まる生徒は、関数をグラフで表した際に、関数の形状全体には目が向かないのではないかと考えたのである。

本研究の分析結果より、上記のような仮説が生成したが、この仮説をもとにした実態調査の設計・実施には至っていない。この点については、今後の課題として継続的に研究を進める。

3) 生徒の理解を促進する学習指導の要件

本研究では、仮説的な学習プロセスを分析することを通して、方程式やその中の文字の見方が変容する箇所を具体的な教材とともに特定した。

本研究で分析した仮説的な学習プロセスの特徴をより鮮明に把握するために、変数概念の育成を目標に提案された教科書「Concepts in Algebra」との比較を行った。

この比較により、本研究において理論的考察の対象とした仮説的な学習プロセスの特徴が顕著に表れた。それは比較した双方の教科書では「未知数」としての文字の取り扱いに大きな違いがあることが明らかになった。

我が国の学習指導要領・検定教科書では、方程式の単元において「等式の性質」と「方程式の立式」を学習する際に、「未知数」としての文字の見方が強調される。それゆえ、方程式を立式し、代数的に解く際に方程式の中の文字は「未知数」として捉えられるはずである。このような「未知数」として文字の見方により、「方程式を関数を表す式とみる」際に文字の見方の変更が必要となることが明らかになった。一方、教科書「Concepts in Algebra」では、文字を「変数」として一貫して使用しているために文字の見方の変更が不必要なのである。

以上から、方程式の中の文字の見方を変更することに伴う生徒の困難性を生起させない一つの方策として、文字の見方を一貫して指導することが考えられる。

この成果に基づき、教授実験の設計を進め、困難性を解消する方法を考察した。

以上の考察の意義は、これまで特に研究対象とされてこなかった、文字の見方を変更する際に顕在化する困難性に焦点化し、数学的概念の二面性をもとにその困難性の要因を考察したことにある。一方で、数学的概念の二面性により生起する生徒の困難性の綿密な分析や、困難性を解消する方法の実証的な検証には至っていない点に課題がある。

[主要引用文献]

Kieran,C.(1997). Mathematical Concept at the Secondary School Level : The Learning of Algebra and Functions.In T.Nunes, & P.Bryant (Eds.), *Learning and teaching Mathematics: an international perspective* (pp.707-762), UK: Psychology Press.

Sfard,A., & Linchevski,L. (1994). The Gain and the Pitfalls of Reification:The Case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp.191-228.

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematical Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Reserch in Mathematics Education*, 26, pp.114-145.

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1件)

榎本哲士 (2016). 「小学校算数科における変数概念の指導事例：米国における研究動向をもとに」, 新算数教育研究会 (編)『新しい算数研究』, 2017年1月号, pp.36-37, 査読なし.

[学会発表](計 2件)

S.Enomoto. An Comparison of Learning Trajectory in Textbooks: Focused on a Japanese Junior High School Textbook and CIA , The 13th International Congress on Mathematical Education (ICME13) , July 26, 2016 , Hamburg(Germany).

榎本哲士 「代数学習における式の見方の変容に関する一考察」, 日本数学教育学会 第48回秋期研究大会, 2015年11月7日, 信州大学(長野県長野市).

6 . 研究組織

(1)研究代表者

榎本 哲士 (ENOMOTO Satoshi)

白鷗大学・教育学部・講師

研究者番号：60758811