様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ４ 月 ２８ 日現在

機関番号：３４４１６
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2015～2016
課題番号：１５H０６１２８

研究課題名（和文）代数的構造による離散力学系の可積分性判定手法の構築

研究課題名（英文）Construction of the integrability criteria for discrete dynamical systems in view of their algebraic structures

研究代表者
神吉　雅崇（Kanki, Masataka）

関西大学・システム理工学部・助教

研究者番号：２０７５５８９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：離散方程式系の代数的な構造を詳細に研究することで、方程式の可積分性を正確に判定するための基準を構成することができた。得られた基準をcoprime条件と名付け、多くの既知の離散力学系に適用した。他変数の方程式への拡張および、非アルキメデス的基礎体上の方程式への拡張を行い、既知のクラスに当てはまらない新しい疑似可積分系を構成することができた。具体的には、離散Korteweg de Vries方程式および離散戸田方程式の各項に正整数の指数を導入することで得られた系は、次数の増大度が指数関数的という観点では非可積分であるが、coprime条件を満たすことが分かった。

研究成果の概要（英文）：We have costructed one of the integrability criteria for discrete dynamical systems, by investigating the algebraic structures of the equations in detail.
We call this criterion the coprimeness condition, and have applied the criterion to many of the known integrable discrete dynamical systems.
We have constructed new types of 'quasi-integrable' equations, by our method of coprimeness-preserving extensions of the already known integrable and non-integrable equations. By introducing several parameters in the terms of the discrete KdV equation and the discrete Toda equation, we have obtained coprimeness-preserving and non-integrable (in the sense that the degrees of their iterates grow exponentially) extension of these discrete equations.

研究分野：解析学基礎

キーワード：可積分系　力学系　差分方程式　互いに素条件　離散力学系

１．研究開始当初の背景

(1) 本研究のテーマは「可積分系」である。可積分系とは、主に非線形でありながらも求積法により厳密解が記述できる方程式のクラスの総称である。近年では可積分系の離散化の研究が盛んである。連続系の性質を保つ数値計算スキームの探索に始まり、離散 KP 階層に代表される離散系そのものの構造が注目された。

(2) 研究の進展に伴い様々な離散力学系であって、連続系の可積分性と類似の性質を持つものが提唱された。しかし一方で様々な方程式が出現するにつれて離散系が可積分であることをどう定義すべきか議論が生じるようになった。

２．研究の目的

(1) 本研究の主目的は、離散力学系に対して従来から知られている可積分性判定基準の適用限界を知ること、および、多くの方程式に役に立つ新しい同判定基準を構成することである。具体的には、方程式の各項をある基礎体上で因数分解する際、共通因子の出現頻度を用いた基準を構成するなど、代数的な知見を応用することにより、統一的な判定基準を構成することを目指す。これにより判定基準同士の矛盾を解消し、離散系の複雑さについての理解を深めることが期待される。

(2) 以前の研究では、有限体上での非線形方程式の時間発展を調査するための数値計算を行っていた。一般的な法則の研究のため、文字変数に数値を代入せず計算した際に、一見すると複雑な項についても、可積分系に限っては共通因子の出現回数・頻度が単純な規則に従っていることを発見した。その事実を数学的に厳密に証明しようとする中で、特異点閉じ込めテスト（既知の可積分性判定テストのひとつである。引用文献①参照）との類似性を見出し、可積分性の判定に役立つのではないかという着想を得た。

３．研究の方法

(1) 本研究では前述の離散可積分性判定基準の構成のため、一般項が、初期変数の有理函数としてどのような代数的性質を持つかを詳細に研究する。当面は具体的な方程式について研究することで一般理論を導く助けとする。例えば一変数の差分系では Quispel-Roberts-Thompson 写像および離散パンルヴェ方程式の中から特徴的なクラスを抽出し、co-prime 条件（ある一定距離離れた２項が互いに素である性質）の成立を証明する。一部の特殊なケースについてはすでに時弘氏（東京大）、間田氏（日本大）との共同研究成果がある（引用文献②）ため、境界条件の多様化および、方程式の多変数化・多次元化という拡張が期待される。

(2) 次に多次元の写像である、離散 KP 方程式およびその reduction により得られる離散 KdV 方程式、離散戸田方程式、離散 sine-Gordon 方程式について既約性および co-prime 条件の観点から研究する。多変数の写像では、初期変数の組が高次元空間をなすため、特異点での blowing-up 手法によって初期値空間を構成することが非常に困難である。代わりに、各項における因数分解という局所的な性質を詳しく調査することで多次元の写像における可積分性を定式化する。非線形系においては、ローラン現象をもつ（一般項がローラン多項式であるような補助方程式に帰着される）ケースが多いと予想されるので、クラスター代数の知識を援用することでローラン現象および既約性を詳細に議論することができる。さらに、通常の基準（特異点閉じ込めテストや代数的エントロピー(引用文献③)によるテスト）が互いに矛盾するため可積分性判定が行えない写像について調査する。例えば Hietarinta-Viallet 方程式や、Grammaticos 氏（パリ第７大学）らによる線形化可能系と呼ばれる一群の写像である。本研究における判定基準を精密化することで、これらの写像を例外的ケースであるとして除外せず、統合的に理解できるようになる。

４．研究成果

(1) 離散力学系の可積分性判定基準について、共通因子の出現頻度を定式化することで精密化を行った。具体的には、方程式の一般項を、複素数体上の初期変数の有理函数であると考え、出現する因子を調査した。先年度、時弘氏（東京大）・間田氏（日本大）と共同で行った、離散 KdV 方程式の特定の境界条件についての研究により、「ある一定の距離以内に存在する２つの項同士を除いて、相異なる２項には共通因子が存在しない」という性質が、可積分性と関係していること判明している。ある正の定数 D が存在して、D 以上離れた２項が互いに素であるという性質が成り立つとき、方程式は「co-prime 条件」を満たすと呼称している。まずは拡張された離散 Toda 方程式、拡張された離散 KdV 方程式などの高次の離散可積分系およびその reduction によって得られる式（Somos 数列の拡張が含まれる）においてこの co-prime 条件を厳密に定式化・証明を行った。具体的には、次の２つの結果を得た。１つめの結果として、離散 KdV 方程式（非線形形式）の一部の項に正の偶数パラメータを入れる拡張を行った方程式を提案した。パラメータは項の指数として入れた。提案した方程式は次数の増大度が指数関数的である点で非可積分系であるが、co-prime 条件を満たすことが分かった。結果として非線形形式のすべての項は、一定の条件の下で

既約であり、かつ、格子上の距離が２以上離れた任意の２項は互いに素であることが分かった。ここで方程式は２次元整数格子上で定義されていることに注意する。証明には、離散 KdV 方程式に対応する双線形形式の類似物が、提案した方程式にも存在することを用いる。この類似物のすべての項は初期変数のローラン多項式であり、かつローラン多項式として既約であることを証明できた。この結果により、非線形形式に対する定理が従った。主要な結果は Institute of Physics から雑誌論文②として出版された。２つめの結果として、神谷氏（東京大）らの協力を得て２次元離散戸田方程式の双線形形式の各項に正整数の指数を入れることで拡張した方程式を co-prime 条件保存２次元離散戸田方程式と呼び、実際に co-prime 条件の定式化・証明を行った。Co-prime条件保存離散戸田方程式においては、任意の２項は互いに素であることが判明した。主要な結果は American Institute of Physics から雑誌論文①として掲載された。

(2) 非線形系においては、双線形形式への変換を行うことで、クラスター代数の結果によってローラン性（一般項が初期変数のローラン多項式である現象）および既約性が証明できるケースがあると知られているが、本研究では、対応する双線形形式が知られていない非線形系（Hietarinta-Viallet系、可解カオス系、線形化可能系）についても、多重線形形式を構成することで、クラスター代数およびその一般化との関係を研究することができた。クラスター代数の一般化にはいくつかの形式があり、本研究では主に LP 代数を用いている。クラスター代数関連の結果は未発表であるが、大久保氏（東京大）の協力を得て論文を作成中である。これらの研究をもとに、co-prime 条件が判定基準として妥当であると判断した。本研究により、その他の各種離散方程式についても、ある程度機械的に可積分性を調査することが可能になったという点でインパクトがあると考えられる。既存の判定基準による結果との一致・差異についても多くのデータが得られており、今後の研究の進展に役立つと期待できる。

(3) 得られた成果の代数的な側面としては、一般項の因数分解を詳細に分析することで特異点構造を把握することができた。非線形の多次元力学系の発展は非常に多くの項を含むため、効率の良い数値計算を行うことが重要になる。このため、一部の独立変数を適切な有理数に置き換えることで計算を早めた。そのため Diophantine integrability の考え方により、有理数の複雑さの指標である高さ（height）が、従来の代数的エントロピーの整数論的類似物であることを見出し、これにより代数的エントロピーの近似値の計算に関して、高速かつ信頼性の高い計算を行うことができるようになった。さらに、用いる値を有限体上の元とすることでさらなる速度の向上がなされることが分かった。

(4) (3)の結果と関連して、拡張された Hietarinta-Viallet 方程式を考察し、その代数的エントロピーの厳密値を求めた。研究は、まず(3)の手法によってコンピュータを用いた数値計算実験を行い、予想を立て、その予想を証明するという流れで行われた。指数部分が奇数である系は、特異点閉じ込めテストに通らず、従来の研究の範疇ではなかったが、今回初めて代数的エントロピーを導出することができた。証明の細部は次数の漸化式の構成に関して煩雑であり、数値計算による予測がなければ自信をもって計算を進めることは困難であった。したがって(3)での結果が研究の促進に寄与する技術であったと考えられる。拡張された Hietarinta-Viallet方程式の代数的エントロピーに関する結果の主要部分は Institute of Physics の発行する数理物理学専門誌に雑誌論文④として出版された。線形化可能系を含めたその他の離散方程式についても同種の数値実験を行い、代数的エントロピーの近似値が０に漸近的に近づくかどうかについて、非常に効率の良い判定を行うことができるようになった。厳密な意味での代数的エントロピーと Diophantine entropy の差異について研究することは今後の課題である。Topological entropy をはじめとする、他のエントロピーの概念も写像の複雑さの別表現であるから、これらとの関連性についても今後引き続き研究を行うことが期待される。

＜引用文献＞

① B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou: Do integrable mappings have the Painleve property ?, Phys. Rev. Lett. 67 巻, 1991, pp. 1825-1828

② M. Kanki, J. Mada, T. Tokihiro: Singularities of the discrete KdV equation and the Laurent property, J. Phys. A: Math. Theor. 47 巻, 2014, pp. 065201

③ M. P. Bellon, C. M. Viallet: Algebraic Entropy, Comm. Math. Phys. 204 巻, 1999, pp. 425-437

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① Ryo Kamiya, Masataka Kanki, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro, Journal of Mathematical Physics, 査読あり, 58巻, 2017, 012702
DOI: 10.1063/1.4973744
② Masataka Kanki, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro, Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems, Journal of Physics A, 査読あり, 49巻, 2016, 23LT01
DOI: 10.1088/1751-8113/49/23/23LT01
③ Masataka Kanki, Yuki Takahashi, Tetsuji Tokihiro, Graphs emerging from the solutions to the periodic discrete Toda equation over finite fields, NOLTA, 査読あり, 7巻, 2016, pp. 338-353
DOI: 10.1587/nolta.7.338
④ Masataka Kanki, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro, Algebraic entropy of an extended Hietarinta-Viallet equation, Journal of Physics A, 査読あり, 48巻, 2015, 355202
DOI: 10.1088/1751-8113/48/35/355202

〔学会発表〕（計１３件）
① Masataka Kanki, Detecting the integrability of discrete dynamical systems by the co-primeness property, IMACS conference、2017年3月29日、アセンズ（アメリカ）
② 神谷　亮、神吉　雅崇、時弘　哲治、間瀬　崇史、２次元離散戸田方程式の疑似可積分拡張、日本数学会、2016年9月15日、関西大学（大阪府吹田市）
③ Nobutaka Nakazono, Yang Shi, Masataka Kanki, Continuous, discrete and ultradiscrete Painleve equations, Abecedarian of SIDE meeting、2016年6月28日、モントリオール（カナダ）
④ 神吉　雅崇、時弘　哲治、間瀬　崇史、非可積分系に対応した２変数離散方程式、日本応用数理学会、2016年3月5日、神戸学院大学（兵庫県神戸市）
⑤ 神吉　雅崇、時弘　哲治、間瀬　崇史、拡張型 Hietarinta-Viallet 方程式の代数的エントロピー、MIMS共同利用研究集会、2015年11月5日、明治大学（東京都千代田区）
⑥ 神吉　雅崇、時弘　哲治、間瀬　崇史、拡張型 Hietarinta-Viallet 方程式について、日本応用数理学会、2015年9月9日、金沢大学（石川県金沢市）
⑦ Masataka Kanki, Coprimeness condition and the algebraic entropy of the discrete dynamical systems, 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 2015年8月11日, 北京（中国）

〔その他〕
ホームページ
http://researchmap.jp/kanki/

６．研究組織
(1)研究代表者
神吉　雅崇 (KANKI, Masataka)
関西大学・システム理工学部・助教
研究者番号：２０７５５８９７