

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2015～2016

課題番号：15H06129

研究課題名(和文) 正則曲線と複素モンジュ・アンペール方程式の研究

研究課題名(英文) Holomorphic curves and complex Monge-Ampere equation

研究代表者

千葉 優作 (Tiba, Yusaku)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：90635616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：複素モンジュ・アンペール方程式と正則曲線の関係を研究した。結果として、高次元の複素平面からコンパクトなケーラー多様体への正則写像の像の補集合が多重劣調和関数の極に含まれるための条件を与えることができた。既存の研究ではこのような条件が与えられたことはなかったので、正則写像の新しい性質を調べることができたといえる。

研究する際に多変数ポテンシャル理論を使った。これにより正則写像の研究で新しい方法が確立できたともいえる。

研究成果の概要(英文)：We study the relation between the complex Monge-Ampere equation and holomorphic curves. As a result, we show a sufficient condition such that the complement of a entire maps in a compact Kahler manifold is pluri-polar set. This is a new property of entire maps. We use pluripotential theory to study holomorphic maps.

研究分野：多変数複素関数論

キーワード：複素モンジュ・アンペール方程式

## 1. 研究開始当初の背景

ケーラー多様体上の正則写像を研究することは、多変数関数論や複素幾何の枠組みをこえて、代数幾何学、整数論にも重要な応用を持つため盛んに研究されている。

正則写像を研究する際によく使われるのはネヴァンリンナ理論と小林双曲性である。ネヴァンリンナ理論の目的は、射影的代数多様体の中に含まれる超曲面と正則曲線の交点を調べることである。ただしここでいう正則曲線とは複素平面からの正則写像のことである。ネヴァンリンナ理論では、正則曲線と超曲面から定まる個数関数、特性関数、接近関数という3つの関数を定義して、それらの大小関係により正則曲線の漸近的な挙動を調べる。特性関数を個数関数などを使って上から評価した式は、ネヴァンリンナの第二主要定理と呼ばれており、これにより正則曲線に関する多くの情報を知ることができる。

また複素多様体上には小林擬距離とよばれる内在的な擬距離が存在する。

小林擬距離は複素多様体間の正則同型写像で保たれるといった性質から、複素幾何学において自然であり重要な研究対象である。小林擬距離が距離となるときその多様体を小林双曲多様体と呼ぶ。小林双曲多様体は、定点ではない正則曲線を含まないという性質を持つことから、ネヴァンリンナ理論とともに複素多様体上の正則曲線を調べる有効な概念と考えられている。

また、小林双曲多様体の対数的な類似として小林双曲的埋め込みが定義される。

小林双曲多様体においては次の小林予の解決が、研究の主な目的のひとつであり多くの研究結果がなされてきた。

しかし一般にケーラー多様体において正則曲線といった複素多様体からの代数的では

ない写像を調べることは難しく、また多変数ポテンシャル論を使った研究はあまり調べられていなかった。既存の結果としては高次元複素平面からケーラー多様体への正則写像の像がユークリッド位相で稠密になる十分条件や、ケーラー多様体が複素射影空間のときなどはその補集合のハウスドルフ次元について調べられていた。しかし解析的な視点では補集合が多重劣調和関数の極に含まれているかどうかを調べるのが自然な流れといえる。また既存の研究の大きな結果として、小林・落合により得られた「一般形射影代数多様体には同次元の複素平面からの退化しない正則写像は存在しない」というものがある。このため我々が考えていくのは射影空間などの、一般型ではない多様体となる。

## 2. 研究の目的

研究の目的は射影代数多様体の性質と

そこに含まれる正則曲線（複素平面から多様体への正則写像）の性質がどのように関わっているかを明らかにすることである。

代数幾何学において、有理曲線が重要な役割を果たすが、正則曲線もそれを含む射影代数多様体の重要な性質を反映していると思われる。例えば、Green-Griffiths 予想は、一般型射影代数多様体上の正則曲線は代数的に退化する（真部分多様体に含まれる）だろうという予想で正則曲線と標準束の関係性を主張している。

またケーラー多様体上の正則曲線を複素モンジュ・アンペール方程式を用いて研究する。また正則写像の研究に多変数ポテンシャル理論の手法を導入できないかを考える。それにより複素モンジュ・ア

ンペール方程式の滑らかでない解を正則写像の研究に取り入れることができるようになると思われる。

またモンジュ・アンペール葉層構造といった、代数的な手法では取り入れるのが困難な手法を使って正則写像の研究をできないかも調べる。このような超越的手法が確立できれば今後の正則写像の研究にも十分役立てることができるはずである。

### 3. 研究の方法

滑らかではないポテンシャルをもつ複素モンジュ・アンペール方程式を用いて高次元の複素平面からコンパクトケーラー多様体への正則写像を調べた。複素モンジュ・アンペール方程式は多変数関数論において最も重要な非線形偏微分方程式の一つである。多重劣調和関数が、実関数論における劣調和関数の多変数関数論における類似であるとする、最高次数の複素モンジュ・アンペール方程式の解は(多重調和関数とともに)調和関数に対応するものと考えられることができる。

今回モンジュ・アンペール方程式を正則写像の研究に用いるとき多変数ポテンシャル論の手法を用いた。より具体的にはケーラー多様体上の豊富な正則線束上の計量におけるポテンシャルで滑らかではないが、有界であるものを考える。そうすることで、多重劣調和関数の極に入っていないような集合上に測度をもつモンジュ・アンペール測度を構成することができる。これを引き戻すことで正則写像の像のかたちを解析しようというのが大まかな方法である。この際に正則写像に何らかの条件を付けないと、その像の稠密性は得られない。例えばファトゥ・ビーベルバッハ写像のような例外的な正則写像が現れてしまう。これは二次元の複素平面から二次元射影空間への正則写像で退化しないのに、その像が稠密とはな

らないものである。そこで正則写像の特性関数により、正則写像の挙動をある程度制限することにする。この制限は既存の結果にもよく現れるものであり、本研究では多少強い条件を仮定して、正則写像の像の補集合が多重劣調和関数の極に含まれるということを証明する。

### 4. 研究成果

正則写像の像の補集合が局所的に多重劣調和関数の極に含まれるような正則写像の十分条件を、特性関数を用いて与えることができた。この十分条件は既存の研究で与えられたものよりも強い条件となってしまうが、得られる結果はこれまでのものよりも強くなっている。

さらに2次元の場合はこの条件は今までの研究の条件についていた下極限が極限に変わったものであり、それほどの違いはないといえる。

また多変数ポテンシャル理論を用いて正則写像を研究する方法も示すことができた。既存の研究では多様体上の超曲面を高次元複素平面上に引き戻しそれを Jensen の公式を用いて研究する手法が主に行われていた。しかしそれでは複素射影空間のような具体的な多様体に関してはうまく調べられていたが、より一般的な複素多様体に関しては満足な結果は得られていなかった。本研究で行った手法ではケーラー多様体上の有界なポテンシャルを持つ複素モンジュ・アンペール測度を用いることで、これまでの超曲面を引き戻す方法では得られなかった結果を得ることができた。正則写像の定義域の次元が低い場合である正則曲線についての成果はほとんどできなかったが次のような結果を得ることができた：「コンパクトケーラー多様体上の豊富な線束の計量におけるポテンシャルで有界であり擬多

重劣調和関数となるものを考える。このときその台集合の補集合は、全体のケーラー多様体に小林双曲的に埋め込まれている。」このことにより例えば豊富な線束の切断をもってきて、その近傍をコンパクトケーラー多様体から除くとそこは小林双曲的に埋め込まれていることが証明できる。

また多変数ポテンシャル論の命題もいくつか証明できた。例えば混合モンジュ・アンペール方程式の不等式や、極大多重劣調和関数の次元の低いところへの引き戻しについての命題などである。

今後の課題としては、特性関数の条件を緩めることと、より次元の低い複素平面からのケーラー多様体への正則写像（正則曲線）をどのように研究するかを調べることである。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

Y. Tiba, The intersection of an entire holomorphic mapping and a complex Monge-Ampère current with a bounded potential, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

〔学会発表〕（計 2 件）

(1)The intersection of an entire holomorphic mapping and a complex Monge-Ampère current with a bounded potential, 複素解析幾何学のポテンシャル論的諸相, 東京大学, 2016年2月.

(2)The intersection of an entire holomorphic mapping and a complex Monge-Ampère current with a bounded potential, 東北複素

解析セミナー, 東北大学, 2016年7月

(3)The intersection of an entire holomorphic mapping and a complex Monge-Ampère current with a bounded potential. 多変数関数論冬セミナー,

福岡工業大学, 2016年12月

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況（計 0 件）

名称:

発明者:

権利者:種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

千葉 優作 ( Tiba Yusaku

)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任

助教

研究者番号： 294256

(2) 研究分担者 ( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：

(4) 研究協力者  
( )