様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　6 月 16 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2015～2016
課題番号：１５Ｈ０６６３４

研究課題名（和文）保型表現の合同による岩澤主予想の研究

研究課題名（英文）Iwasawa main conjecture and congruences between automorphic representations

研究代表者
並川　健一（NAMIKAWA, Kenichi）

東京電機大学・工学部・助教

研究者番号：１０７５７０６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：テータ関数(吉田リフト，Harris-Soudry-Taylor(HST)リフト)，およびL関数の特殊値について研究をした．以前の研究で得られていた内積公式の応用を研究し，いくつかの仮定の下で，実二次体上のHilbert保型形式のRankin-Selberg型L関数に対し，その特殊値が非自明となるtwistの存在について結果を得た．

また以前の結果で，特別なBessel周期に対し，そのL関数との関係を記述したが，これをより一般的なBessel周期の場合に考察をした． 明示的な結果については研究中であるものの，吉田リフトの場合と同様の定式化が出来ることを確かめた．

研究成果の概要（英文）：We studied Theta functions (Yoshida lifts, Harris-Soudry-Taylor (HST) lifts) and special values of L-functions. By using an explicit inner product formula, which was obtained in our previous research, we showed that a non-vanishing result of special values of twisted Rankin-Selberg type L-functions which is associated with Hilbert modular forms over real quadratic fields under some assumptions.
We also studied an explicit relation Bessel periods and special values of L-functions, which is a generalization of our previous result. An explicit result is not yet available, however, we find a formulation which is an analogue of Yoshida lifts case.

研究分野：数論

キーワード：数論　L関数　保型表現　岩澤理論

1．研究開始当初の背景

古典的な有理数体上の GL(1)の岩澤主予想は, Mazur-Wiles によって, GL(2)の保型表現の合同を用いることにより，解決された．保型表現論の発展に伴い，この保型表現の合同による議論を，より一般の代数群の保型表現でも構成する研究が現れ始めている．Mazur-Wiles は，岩澤主予想の証明の際に, GL(2)の尖点形式とアイゼンシュタイン級数との合同が用いられた．この議論の類似を, U(2,2)の場合に考察した Skinner-Urban をはじめ，U(2,1)の場合の Hsieh，GSp(4)の場合の Urban の結果などが，岩澤主予想の高次元化の例として挙げられる．

Mazur-Wiles のアイゼンシュタイン級数を用いた研究を高次元化する研究の方向とは別に，肥田-Tilouine は，GL(2)の尖点形式とテータ関数との合同を研究し，CM 体の反円分岩澤主予想を導いた．本研究は，この肥田-Tilouine の研究の高次元化を目標に開始した．

研究開始当初は，肥田-Tilouine の高次元化を試みる研究は，まだ初期段階にあったが、テータ関数の研究の近年の発展状況を考えると，肥田-Tilouine の高次元化をするための道具立ては揃いつつある状況にあると判断された．特に GSp(4)では, Galois 表現や保型表現の研究が進んでおり，特に GSp(4)上のテータ関数は，GL(2)の保型表現からテータ対応で決まるため，この場合に研究を始めることとした．

GSp(4)上のテータ関数は，吉田リフト，Harris-Soudry-Taylor(HST)リフトと呼ばれ，それぞれ有理数体上二次のエタール代数上の GL(2)の保型表現から定まるテータ対応で記述をすることが出来る．本研究期間開始当初は，すでに Ming-Lun Hsieh との共同研究で，これらテータ関数について，その具体的な構成方法，および Bessel 周期，Petersson 内積についての明示的な公式を得ていた．(ただし HST リフトの場合は，やや弱い結果のみを得ていた.)

2．研究の目的

本研究の大きな目的は，肥田-Tilouine の反円分岩澤主予想の高次元化を目的とし，GSp(4)の尖点形式とテータ関数との合同を構成することである．

この研究目的のために，保型表現の合同を考察するためのテータ関数について詳しく調べる必要がある．具体的には，テータ関数の Fourier 係数の整性, Fourier 係数の法 p での非消滅，内積公式，肥田族の構成などが研究対象である．

また岩澤主予想を目的としているため，p 進 L 関数についても研究をする必要がある．GSp(4)のテータ関数を用いた研究では，有理数体上二次のエタール代数上の GL(2)の保型表現に対する浅井表現(twisted tensor representations)に付随する L 関数が現れる．この浅井 L 関数に対し，代数部分の p 進的な意味付けや，p 進 L 関数の構成が研究目的である．とくに岩澤主予想を正確に定式化するためには，p 進 L 関数を“精密”に構成する必要がある．ここでいう“精密”とは，Γ因子・補間公式の正確な計算, Tate 捻りに対し，どう振る舞うのかを書き下すことをいう．これらの p 進 L 関数の“精密”な構成は，一般の簡約代数群の保型表現に付随する p 進 L 関数の構成では知られている例は少なく，何らかの意味で不十分であることが多い．こういった p 進 L 関数の構成の現状を把握することも，研究目的の一つとなる．

上記のテータ関数の研究は，岩澤主予想以外にも, (テータ関数の研究の本来の研究動機であるように)保型 L 関数の特殊値や周期の研究にも応用があり，この方面にも研究を行うことも，本研究の研究目的である．

3．研究の方法

保型表現の合同の構成のために，以前の研究から引き続き，テータ関数を詳しく調べる．また以前に得ていた Bessel 周期公式，内積公式を応用し，保型 L 関数の特殊値の研究へ応用する．

またテータ関数を通る肥田族の構成にために，Bessel 周期公式，内積公式の修正を行う．

さらに岩澤主予想のために，保型表現に対する p 進 L 関数の構成の現状を把握していく．特に p 進浅井 L 関数の構成のための，技術的に困難な点や，先行結果における不十分な部分について，明らかにしていく．

4．研究成果

研究期間内にテータ関数，及び L 関数の特殊値について研究をした．大まかに分けて以下の 3 種類について研究をした:

(1) L 関数の特殊値の非消滅;
(2) HST リフトの Bessel 周期;
(3) p 進 L 関数の現状把握．

以下にそれぞれについて詳しく記述する．

(1):以前の研究で得ていた Bessel 周期の研究において，実二次体の Hilbert 保型形式から定まる吉田リフトの場合，Fourier 係数の p 進的な非自明性を，Rankin-Selberg 型 L 関数の twist の特殊値の研究に帰着させていた．しかしながら Fourier 係数を調べるためには，twist する指標として，ある特殊なものを取らなくてはならず，特殊値の p 進的な非自明性の証明には至らなかった．

以上の点を踏まえ，まずは特殊値が非自明となるような twist の研究を行った．これは Saha-Schmidt が，楕円保型形式のペアに対し，その特殊値が同時に非自明とはならない twist の存在を定量的に示していたことの，Hilbert 版と見なせる．Saha-Schmidt の結果において，twist の存在だけなら，千田-Hsieh による結果からすぐに従う．しかし，その Hilbert 版では，twist の存在だけに限っても，先行結果からは分からないという状況だった.この研究の結果として，
・Hilbert 保型形式の重さの片側が 2 に限る,
・レベルを割る素数が実二次体上分裂，
などの仮定の下で，Saha-Schmidt の Hilbert 版が成り立つことが示せた．証明には，以前研究した内積公式による吉田リフトの非消滅と，吉田リフトのある種の Fourier 係数が消滅していることを用いた．

特殊値の非自明性の証明の副産物として，レベルが平方因子を持たない場合に吉田リフトの生成する GSp(4)の保型表現において，同時 Hecke 固有関数を特定した．分岐素点での Hecke 作用素の計算は，Robert-Schmidt の結果を用いれば，局所形式の次元が 1 の場合明らかである．以前の研究で構成した Theta 関数を用いれば，次元が 2 の場合も，2 つの固有ベクトルを具体的に構成することが出来た．

(2):以前の研究では，HST リフトに対しては，特殊な場合にしか Bessel 周期を計算出来ていなかったものを，より一般の場合にも，明示公式を得ることを目的に研究を行った．HST リフトは，虚二次体 F 上の GL(2)の保型表現のテータ対応から定まる．以前の研究では，同じ虚二次体 F に付随する Bessel 周期を考察し，これを元の GL(2)の保型表現の標準 L 関数の特殊値で記述していた．研究期間内では，これを F とは異なる虚二次体に付随する Bessel 周期の場合に，考察をした．この場合，Bessel 周期を直接計算せずに，Waldspurger 公式を用いて，Bessel 周期の内積を計算出来，吉田リフトの場合と同様に Rankin-Selberg 型の L 関数の特殊値が現れる．明示的な結果(特に無限素点での局所積分の計算)はまだ得られていないものの，吉田リフトと同様の定式化を行うことで，具体的な積分の問題に帰着させた．

(3):p 進浅井 L 関数の構成の現状について，考察を行った．反円分的 p 進浅井 L 関数については，Hsieh による三重積 p 進 L 関数の研究の一部と見做すことが出来る．一方で，円分的 p 進浅井 L 関数は，GL(4)の保型表現と見做す以外には，先行研究は無いと思われる．GL(4)の p 進 L 関数は，保型表現が，適当な多様体上の定数層に現れるとき Ash-Ginzburg，一般の場合は，Gehrmann による仕事があった．これらの結果では，無限素点での局所積分が計算されていないことや，“整”構造を考えていないため，複数ある臨界値同士を比べる(Tate 捻りによる振る舞いを見る)ことが出来ないなど，まだ十分とは言えない点があると分かった．また Sun の結果より，無限素点での局所積分は非自明として良いことが分かるが，それから具体的に Γ 因子を得る事も現状では難しいように思われる．

以上の事から，p 進浅井 L 関数の構成には,GL(2)の保型形式を用いた L 関数の積分表示から研究を始めることが良いと判断された.特に虚二次体上の GL(2)の場合，無限素点での局所積分や，周期の選択について，状況が整備されていると考えられるので，引き続き特に研究を進めていく．

さらに簡約代数群の保型表現に対する p 進 L 関数について，最近の状況を精査した．幾つかの場合には，改善の余地があることや，弱い形での p 進 L 関数の構成の可能性など，今後の研究において技術的に困難な点を明らかにした．また Ash-Ginzburg による GL(2n)の p 進 L 関数の構成について， 合宿型セミナーにおいてその詳細を概説講演した．

研究期間内には，吉田リフトの Bessel 周期についての論文と，内積公式についての論文を投稿した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

1. K. Namikawa
On p-adic L-function associated with cusp forms on GL_2,Manuscripta Mathematica, 153, (2017), 563--622.
(DOI:10.1007/s00229-016-0904-5)
(査読有り)

2. M. L. Hsieh and K. Namikawa,
Bessel periods and the non-vanishing of Yoshida lifts modulo a prime,
Math. Z., 285, (2017), 851--878.
(DOI: 10.1007/s00209-016-1730-x)
(査読有り)

〔学会発表〕（計　2　件）

1. 並川健一,
“GSp(4)上の Theta 関数の構成とその応用”
(口頭発表),
研究集会「2017 早稲田整数論研究集会」,
早稲田大学，東京都新宿区，2017 年 3 月 21 日．

2. 並川健一，原隆,
“Modular symbol の方法による GL(2n),

GL(n)×GL(n-1)のｐ進Ｌ函数の構成の現状”
(口頭発表),
RIMS 合宿型セミナー「保型 L 函数の特殊値と付随するｐ進Ｌ函数」,
美山町自然文化村河鹿荘，京都府南丹市美山町，2016 年 9 月 22 日.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
並川健一（NAMIKAWA, Kenichi）
東京電機大学・工学部数学系列・助教
研究者番号:10757066

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし