様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月　 4 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2015～2016
課題番号：１５Ｈ０６６９０

研究課題名（和文）ファノ多様体のピカール数

研究課題名（英文）The Picard number of Fano manifolds

研究代表者
鈴木　拓（SUZUKI, Taku）

早稲田大学・理工学術院・助教

研究者番号：６０７５４８８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題「ファノ多様体のピカール数」に関する研究として，(1)収縮射に着目したファノ多様体のピカール数に関する研究，(2)ファノ多様体に付随する高階の極小有理曲線族に関する研究，(3)ファノ多様体のスロープ安定性に関する研究を行った．(1)では，小収縮射を持たない６次元ファノ多様体に対して，向井予想を証明した．(2)では，ファノ多様体Ｘに付随する高階極小有理曲線族および階数の最大値を表す新たな不変量Ｎ(Ｘ)を導入し，Ｎ(Ｘ)が大きな値を取るための十分条件を与えた．(3)では，スロープ安定でないようなピカール数２以下の特別なファノ多様体を分類した．

研究成果の概要（英文）：For the research task "The Picard number of Fano manifolds", I investigated (1) the Picard number of Fano manifolds in terms of their extremal contractions, (2) higher order minimal families of rational curves associated to Fano manifolds, and (3) slope stability of Fano manifolds. In (1), I proved that Mukai conjecture holds for Fano 6-folds admitting no small contractions. In (2), I introduced higher order minimal families of rational curves associated to Fano manifolds X and a new invariant N(X) as the maximal order of them, and I provided a sufficient condition for Fano manifolds X to have large N(X). In (3), I classified special Fano manifolds with Picard number at most two which are not slope stable

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体　有理曲線　ピカール数　射影空間　収縮射　極小有理曲線族　スロープ安定性

１．研究開始当初の背景

研究代表者が専門としている代数幾何学とは，代数多様体（いくつかの多項式で表させる図形）の性質を研究する数学の一分野である．以下，多様体とは，複素数体上の非特異射影代数多様体を意味する．本研究で研究対象としているファノ多様体とは，豊富な反標準次数を持つ多様体のことである．ファノ多様体は，極小モデルプログラムの最終結果としても現れる基本的な多様体のクラスである．

ファノ多様体に関する有名かつ重要な未解決問題の一つが向井茂氏による予想であり，それを精密化したものが以下の予想である．

予想１（参考文献[2]）任意のｎ次元ファノ多様体Ｘに対して，ρをピカール数，ｉを擬指数としたとき，ρ(ｉ－１)≦ｎが成立する．等号成立はＸが射影空間の直積と同型である場合に限る．ここで，ピカール数とは，多様体上の曲線の数値的類が成すベクトル空間の次元のことであり，擬指数とは，多様体上の有理曲線の反標準次数の最小値である．

予想１については多くの先行研究がある．特別な多様体として，等質空間，トーリック多様体，３次有理連結多様体の場合や，低次元の場合として，ｎ≦５の場合，高擬指数の場合として，ｉ≧(ｎ＋１)/３の場合等においては，正しいことが証明されている（参考文献[4]）．

研究代表者は，これまでに未解決であったｎ＝６の場合についての研究を行い，以下の結果を得ている．

定理２　一般に，ファノ多様体上の任意の二点は，反標準次数に関するある種の極小性を持つ有理曲線の鎖によって繋ぐことができる．その鎖の長さをＬとするとき，Ｌ≦３なる６次元ファノ多様体に対して，予想１は成立する．

定理３　４次有理連結な６次元ファノ多様体に対して，予想１は成立する．

２．研究の目的

本研究の目的は，定理２，３を含む既存の結果を拡張し，より一般の場合において予想１を証明することである．

３．研究の方法

本研究では，有理曲線の変形理論を用いる．予想１は，ファノ多様体のピカール数の上限に関する予想である．ピカール数の上限を求める際，多様体上の有理曲線の族に対して，分裂性（曲線の連続変形によって可約な曲線が得られるかどうか）や有理曲線の鎖で繋ぐことができる範囲の次元が計算できるかどうかが要点となる．研究代表者が既に得ている定理２，３の証明においては，鎖の長さや分裂の仕方に着目する新たな方針によって，ピカール数の上限を求めることに成功している．本研究においても，その方針のもと，より精密な検証を行う．具体的には，多くの具体例における有理曲線の挙動や次元の計算を行うことで，多方面からそれらの関係を調べ，先行研究の手法や新たな手法の適用を図る．

４．研究成果

本研究期間において，以下の３種類の研究を行った．
(1) 収縮射に着目したファノ多様体のピカール数に関する研究
(2) ファノ多様体に付随する高階の極小有理曲線族に関する研究
(3) ファノ多様体のスロープ安定性に関する研究

(1)収縮射に着目したファノ多様体のピカール数に関する研究

一般に，ファノ多様体には，特定の曲線を一点につぶすような収縮射と呼ばれるいくつかの固有の射が存在する．収縮射は，つぶす曲線達の覆う次元によって，ファイバー型収縮射，因子型収縮射，小収縮射の３つに分けられる．

本研究では，収縮射に着目し，より一般的な６次元ファノ多様体に対して，予想１の検証を行い，以下の結果を得た．

定理４　６次元ファノ多様体が
①　ファイバー型小収縮射を持つ場合，
②　因子型収縮射のみ持つ場合，
それぞれにおいて，予想１は成立する．特に，小収縮射を持たない６次元ファノ多様体に対して，予想１は成立する．

①においては，非分裂性を拡張した準非分裂性を持つ有理曲線族について考察することにより，ピカール数を計算することに成功した．②においては，例外因子と呼ばれる特別な因子と各有理曲線との交叉数を考えるという新たなアプローチによって，予想１を証明した．

本研究の結果は，「On the Picard number of Fano 6-folds with a non-small contraction」というタイトルの論文としてまとめ，学術雑誌に投稿中である．

(2)ファノ多様体に付随する高階の極小有理曲線族に関する研究

予想１は，ファノ多様体Ｘ上の反標準次数

が小さい有理曲線の性質に関する予想である．特に，X上の一般の点を固定したとき，その固定点を通るような反標準次数最小の有理曲線全体の集合Hのことを，極小有理曲線族と呼ぶ．極小有理曲線族Hは多様体を成すことが知られている．ファノ多様体Xの構造を解明する際，極小有理曲線族Hの幾何学的性質を調べることの有用性が，J.-M. Hwang や N. Mok らの研究によって知られており，予想１の検証においても有益な情報を与える．

Hが再びファノ多様体になるとき，Hの極小有理曲線族について考えることができる．このように，極小有理曲線族を取る操作を繰り返すことにより，ファノ多様体Xに付随する高階極小有理曲線族という概念を，研究代表者は新たに導入した．また，このような階数の最大値をN(X)と定めた．この不変量は，多様体を覆っている射影空間の次元と関連しており，幾何学的な多くの情報を含んでいる．更に，N(X)が大きな値を取るようなファノ多様体として，射影空間やその直積が出てくることが分かっており，予想１と密接に関連している．従って，N(X)が大きな値を取るための条件を与えることは有意義である．

一般に，多様体Xには，チャーン指標と呼ばれる不変量が定まるが，C. Araujo および A. M. Castravet による結果（参考文献[1]）から，第２チャーン指標の正値性がN(X)≧２であるための十分条件を与え，第２，第３チャーン指標の正値性がN(X)≧３であるための十分条件を与えることが直ちに分かる．

本研究では，高階極小有理曲線族のチャーン指標の情報を組み合わせ論に帰着させ，コンピュータによる解析をも利用することで，これらの結果を以下のように拡張した．

<u>定理５</u>　１００以下の自然数mに対して，ファノ多様体Xの第２から第mまでのチャーン指標の正値性が，N(X)≧mであるための十分条件を与える．

本研究の結果は，「Higher order minimal families of rational curves and Fano manifolds with nef Chern characters」というタイトルの論文としてまとめ，学術雑誌に投稿中である．

(3)ファノ多様体のスロープ安定性に関する研究

ファノ多様体がケーラー・アインシュタイン計量を持つかどうかは，重要な問題である．J. Ross および T. Thomas によって導入された多様体のスロープ安定性の概念は，この問題と密接な関連があることが知られている．

一般に，スロープ安定性は多様体上の豊富な因子Dおよび部分多様体Zに対して定まる．J.-M. Hwang, H. Kim, Y. Lee, J. Park や K. Fujita らによって，Dが反標準因子，Zが曲線の場合についてのスロープ安定性が解明されており，この場合，(a)射影空間，(b)射影空間の直積，(c)射影空間のブローアップを除いて，全てのファノ多様体がスロープ安定となる（参考文献[3]）．このように，スロープ安定でないファノ多様体として，予想１の等号成立に近いファノ多様体が現れる．

本研究では，一般の豊富な因子Dに対するスロープ安定性を調べ，次の結果を得た．

<u>定理６</u>
① 射影空間を除き，全てのピカール数１のファノ多様体は，任意の豊富な因子D，任意の曲線Zに対してスロープ安定である．
② 射影空間の直積を除き，直線で覆われる二つの多様体の直積として表せるピカール数２のファノ多様体は，任意の豊富な因子D，任意の直線Zに対してスロープ安定である．

本研究の結果は，「Slope stability for lines on products of Fano manifolds」というタイトルの論文としてまとめ，学術雑誌に投稿中である．

＜参考文献＞

[1] C. Araujo, A. M. Castravet, Polarized minimal families of rational curves and higher Fano manifolds, Am. J. Math., 134(1), 87-107, 2012.
[2] L. Bonavero, C. Casagrande, O. Debarre, S. Druel, Sur une conjecture de Mukai, Commet. Math. Helv., 78(3), 601-626, 2003.
[3] K. Fujita, Fano manifolds which are not slope stable along curves, Proc. Japan. Acad, 87, 199-202, 2011.
[4] C. Novelli, On Fano manifolds with an unsplit dominating family of rational curves, Kodai Math. J., 35(3), 425-438, 2012.


５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ０ 件）

〔学会発表〕（計 ４ 件）
① <u>鈴木拓</u>, On the Picard number of Fano 6-folds with a non-small contraction, 代数幾何学セミナー, 2017 年 4 月 25 日, 東京大学(東京都).
② <u>鈴木拓</u>, Higher order minimal families of rational curves and Fano manifolds with nef Chern characters, 代数幾何ミ

ニ研究集会，2017 年 3 月 6 日，埼玉大学(埼玉県さいたま市)．

③ 鈴木拓, Higher order minimal families of rational curves and Fano manifolds with nef Chern characters, 代数幾何学セミナー, 2016 年 10 月 4 日, 東京大学(東京都)．

④ 鈴木拓, Higher order minimal families of rational curves and Fano manifolds with nef Chern characters, 山形代数幾何小研究集会, 2016 年 8 月 25 日, 山形大学(山形県山形市)．

〔図書〕（計 ０ 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 ０ 件）

○取得状況（計 ０ 件）

６．研究組織

(1)研究代表者

鈴木　拓（SUZUKI, Taku）

早稲田大学・理工学術院・助教

研究者番号：６０７５４８８５