

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K00007

研究課題名(和文) Tangleの代数的構造の研究

研究課題名(英文) Study on algebraic structure of tangle

研究代表者

山崎 浩一 (Yamazaki, Koichi)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：00246662

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,400,000円

研究成果の概要(和文)：グラフ理論、アルゴリズム理論、計算量理論の分野で、枝幅と呼ばれるグラフパラメータが精力的に研究されている。本研究の目的は、枝幅の双対概念に当たる tangle と呼ばれる離散構造を、代数的な観点で研究することである。研究成果として以下の6つが得られた：(1) 極大イデアルと tangle の類似性、(2) イデアルと loose tangle の類似性、(3) Tangle における劣モジュラ性の役割、(4) Tangle のゲーム理論的解釈、(5) 線形枝幅と単項イデアル、(6) Tangle の位相的解釈。

研究成果の概要(英文)：In the field of graph theory, algorithm theory, and computational complexity theory, branch-width, which is a graph parameter, has been intensively investigated. The purpose of this study is to clarify the structure of tangle from an algebraic point of view, where tangle is a dual concept of branch-width. The following six results were obtained in this study: (1) Similarity between maximal ideal and tangle, (2) Similarity between ideal and loose tangle, (3) Role of submodularity in tangle, (4) Game theoretical interpretation of tangle, (5) A relation linear-width and singly ideal, (6) Topological interpretation of tangle.

研究分野：情報学基礎理論

キーワード：tangle maximal ideal ultrafilter branch-width

1. 研究開始当初の背景

本研究に対する開始当時の学術的背景は次のとおりであった。本研究では枝幅の双対概念に当たる *tangle* と呼ばれる離散構造に対して、その代数的構造を明らかにすることを目的としている。枝幅とはグラフパラメータの一つで、グラフアルゴリズムの分野では以前から精力的に研究されていた。一方で、*tangle* と枝幅は双対関係にありながら、*tangle* 自体の研究は少なく、特に *tangle* の代数的構造に注目した研究はされていなかった。これに対する理由として、*tangle* という概念が(初見では)理解しにくいことが考えられる。一方で当時の自身による研究成果から、*tangle* には理想的な構造が関係するのではないかと(申請時に)予想していた。

2. 研究の目的

当初の研究の目的は、*tangle* の代数的構造を明らかにすることであり、特に *tangle* に潜むと予想される理想的な構造を明らかにすることであった。より具体的には以下となる。

- (1) 極大イデアルと *tangle* の類似性
- (2) イデアルと loose *tangle* の類似性
- (3) *Tangle* における劣モジュラ性の役割

研究が順調に進んだ結果、また研究を進める中で新たな疑問が生じたため、(詳しくは後述するが)*tangle* と超フィルタの関係について深い考察を行うことを、後半の目的とした。

3. 研究の方法

研究方法・手法としては、既存のイデアルの研究成果と *tangle* の研究成果の融合である。上述したように(初見では)*tangle* は理解しにくい、イデアルを理解している人であれば、*tangle* とイデアルの類似性を通して、比較的容易に *tangle* を理解できることが期待できる。このような理解ができると、イデアルで知られている研究成果を *tangle* に導くことが可能となり、その逆もまた可能となる。今回の研究の中で、この融合という手法を用いて得られた結果の具体例として、例えば次の2つが挙げられる。

(1) 分割数が3の分割を使って、極大イデアル(正確にはその双対概念である超フィルタ)を定義できることが知られていたが、同様の方法で *tangle* を定義できることが今回の研究で判明した。

(2) イデアルの双対概念であるフィルタは、収束の概念の定式化に用いられ、一方 *tangle* と枝幅の双対性は、泥棒と警官のゲームを通して説明できる。大雑把に言うなら、泥棒を追い詰めることは、フィルタを細かくすることと解釈してよいことが今回の研究で明らかになった。この解釈をさらに推し進めることにより、超フィルタが泥棒の必勝戦略を表

していることが明らかになった。

4. 研究成果

(1) 極大イデアルと *tangle* の類似性
大雑把に言うなら、極大イデアルの公理系に、与えられた閾値 k に関する劣モジュラの不等式の制約を加えることで、*tangle* が定義できることを示した。この結果を単純に双対的に解釈しただけではあるが、超フィルタの公理系に、与えられた閾値 k に関する劣モジュラの不等式の制約を加えることで、*co-tangle* が定義できる。研究を進める中で、*tangle* より *co-tangle* で議論した方が説明しやすいと感じることが多くなり、研究の後半は *co-tangle* で考えるようになった。実際、文献でも *co-tangle* を使って議論が展開されている。

研究開始当初は、*tangle* と *co-tangle* は単に双対関係であるので、どちら側の視点に立とうと、研究を進めるにあたり差異はないと考えていた。しかし研究を進める中、詳しくは後述するが、*tangle* 側の視点だけではなく *co-tangle* 側からの視点でも、言い換えると、極大イデアル側だけではなく、超フィルタ側の視点にも立つことで、極大イデアル側の視点では得られない知見が得られることに気付いた。

(2) イデアルと loose *tangle* の類似性
先に述べた通り、*tangle* は極大イデアルに相当するが、極大とは限らないイデアルに相当する *tangle* 側の概念は存在するか?、また存在するとしてそれはどのようなものか? という問いは自然である。本研究で、loose *tangle* という概念がそれにあたることを示した。Loose *tangle* は、2007年に Oum と Seymour が導入した既に知られていた概念である。

(3) *Tangle* における劣モジュラ性の役割
研究開始当初は、劣モジュラ性がどのような役割を果たしているのかの理解が乏しかったが、研究を進める中で、以下の役割を持つことが徐々に明らかになった: 集合 A と B が重なりを持つ場合、証明の中での議論が複雑になる。劣モジュラの不等式の制約条件下で、 $C \cup D = A \cup B$ を満たす重なりを持たない集合 C と D が存在すれば、集合 A と B の代わりとして C と D が代用できるため望ましい。劣モジュラの不等式の制約の条件下で、このような C と D が必ず存在することが劣モジュラ性から保証できる。表現は異なるものの、本質的にこの事実と等しい結果が Robertson と Seymour により参考文献 で示されている。

ここまでが申請当時に予定していた研究課題に対する成果報告である。研究成果の(1)、(2)については、発表論文に掲載されている。ここまでの研究成果は、乱暴な言い方を

すれば、単に公理系を変形することで得られる結果である。もちろん、tangle と極大イデアルの類似性を明らかにしたことに意味があると考えられるが、その類似性からさらに何が導けるかについては踏み込んでいない。一方幸いに、ここまでの研究成果は、研究を始めてからの2年間で得られたものであり、残り1年をかけてさらに踏み込んだ研究が出来る。以下にその成果を報告する。

(4) Tangle のゲーム理論的解釈

上述したように、tangle と枝幅の双対性は、泥棒と警官のゲームを通して説明できる。Tangle、co-tangle、超フィルタは本質的に等しいと考えてよいので、泥棒と警官のゲームを通して超フィルタを解釈できる可能性が考えられる。

直感的には、フィルタを細かくして収束させることは、泥棒を狭い"領域"に追い込むこととして解釈できる。この解釈の下で研究を進めた結果、既に知られていた超フィルタと分割との性質(本研究ではこの性質を「コンパス機能」と呼ぶ)が重要であることに気が付いた。枝幅と tangle の双対性では、"分割"という概念が深く関係していることが既に参考文献で示されていたが、コンパス機能の重要性はこれと同じ方向を指している。

ゲームとしての解釈では、分割の各要素は泥棒が逃げ込む可能性のある"領域"に相当し、コンパス機能は泥棒がどの領域に逃げ込めば安全かを示している。超フィルタは、このコンパス機能を別形式に表現したものである。したがって端的に言い換えるなら、超フィルタは泥棒の必勝戦略と解釈できる。一方、警官の必勝戦略は分解木と呼ばれるものに解釈できることが既に知られている。

泥棒の必勝戦略が存在することと警官の必勝戦略が存在しないことは同値であり、すなわち超フィルタと分解木の双対性が言えたことになる。超フィルタと tangle を同一視し、分解木と枝幅を同一視すると、tangle と枝幅の双対性が言えたことになる。この研究結果は発表論文に掲載されている。

(5) 線形枝幅と単項イデアル

枝幅の定義は木構造に基づいている(この木構造が分解木である)が、この木構造をパスに変えることで線形枝幅という概念となる。枝幅の双対概念が tangle であることから、線形枝幅に対しても対応する双対概念が存在するか?、また存在するとしてそれはどのようなものか?という問いは自然である。さらに存在するならば tangle と類似の公理系で表現できることも十分予想される。本研究では tangle の公理系を自然に制限することで、線形枝幅の双対概念が得られることを示した。この研究結果は発表論文に掲載されている。

(6) Tangle の位相的解釈

先に述べたように、フィルタは、収束の概念の定式化に用いられなど、位相空間とも深く関係している。位相空間のコンパクトという概念では、有限交叉性という性質が現れる。超フィルタを用いた tangle の定義でも、有限交叉性に類似した性質が現れ、この性質を本研究では疑有限交叉性と呼ぶ。疑有限交叉性に着目することで、tangle、枝幅とコンパクト性の関係を明らかにできた。

本結果と関連する可能性のある結果として以下がある:無限グラフに対しても tangle が定義できるが、参考文献では無限グラフにおける tangle、超フィルタ、およびコンパクト化の関係が報告されている。本結果と参考文献の結果との関連性を明らかにすることは、興味あるテーマだと考える。

<参考文献>

- M. Grohe, P. Schweitzer, Computing with Tangles, arXiv:1503.00190, 2016.
N. Robertson and P. Seymour, Graph minors X. Obstructions to tree decomposition, Journal of Combinatorial Theory, Series B, vol.52, pp.153-190, 1991.
L. Lyaudet, F. Mazoit, S. Thomassé, Partitions versus sets : A case of duality, European Journal of Combinatorics, vol.31, pp.681-687, 2010.
R. Diestel, Ends and Tangles, arXiv:1510.04050, 2015.

5. 主な発表論文等

(研究代表、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

T. Fujita and K. Yamazaki., Tangle and Ultrafilter: Game Theoretical Interpretation, the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, JCDCG³ 2017, 査読有 2017, JCDCG3_2017_55.
http://www.jcdcgg.u-tokai.ac.jp/JCDCG3_2017_abstracts.pdf

T. Fujita and K. Yamazaki., Linear-width and singly ideal, the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, 2017, JCDCG³ 2017, 査読有 2017, JCDCG3_2017_56.
http://www.jcdcgg.u-tokai.ac.jp/JCDCG3_2017_abstracts.pdf

K. Yamazaki., Tangle and Maximal Ideal,

WALCOM: Algorithms and Computation,
11th International Conference and
Workshops, LNCS, 査読有, Vol.10167,
2017, pp.81-92.
DOI: 10.1007/978-3-319-53925-6_7

〔学会発表〕(計4件)

藤田 顕光(発表者), 山崎 浩一, Tangle
と超フィルタの関係に関する考察, 2017
年度 LA シンポジウム, 2018.

藤田 顕光(発表者), 山崎 浩一, 線形枝
幅と単項イデアル, 電子情報通信学会
コンピューテーション研究会, 2017.

藤田 顕光(発表者), 山崎 浩一, Tangle
と超フィルタについて, 2016 年度 LA シ
ンポジウム, 2017.

山崎 浩一, Tangle と閉包について, 電
子情報通信学会コンピューテーション研
究会, 2016.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 浩一 (YAMAZAKI, Koichi)
群馬大学・大学院理工学府・教授
研究者番号: 00246662