

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2022

課題番号：15K00015

研究課題名（和文）空間の近似のなす組合せ的構造とそれに基づく計算

研究課題名（英文）Combinatorial and computational structures of approximations of spaces

研究代表者

立木 秀樹 (Tsuiki, Hideki)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：10211377

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：空間の近似のなす組み合わせ的な構造と、それを用いた計算について研究を行った。特に、実数のグレイコードという未定義を含むコードの論理的な扱いに関連して、IFP (Intuitionistic Fixed Point Logic) および CFP (Concurrent Fixed Point Logic) という論理体系を共同研究者とともに構築し、そこにおける証明から、グレイコードを入出力する並列プログラムを抽出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

実数のグレイコード表現は、不定元を利用することにより離散的な構造を介さずに一意的に実数を表現したものであり、その上の計算には、非全域性や並列計算による非決定性といった実数計算の特徴的な性質が表れている。IFP / CFPは、非全域性や並列計算による非決定性について、実現可能性解釈を介して論理的に考察することを可能にしたものであり、実現可能性解釈の適用範囲を広げるとともに、並列計算の理解を深めている。

研究成果の概要（英文）：We studied combinatorial structures of approximations of continuous spaces like real numbers and computations based on them. Specifically, we are interested in the infinite Gray-code, which is a non-redundant representation of real numbers on infinite sequences with bottoms (i.e., non-terminating elements). Together with co-researchers, we developed logical systems called IFP (Intuitionistic Fixed Point Logic) and CFP (Concurrent Fixed Point Logic). From proofs in these systems, one can extract correct nondeterministic and concurrent programs that manipulate such partial representations, using their realizability interpretations.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：プログラム抽出 非決定性 実数計算 並列計算 実現可能性解釈

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

実数などの連続な対象上の計算はコントロール空間などの離散的な構造を用いた冗長な表現を經由して考えるのが一般的である。それに対し、実数のグレイコードは、ドメインへの埋め込みを用いることにより、表現の一意性を実現し直接的な計算を可能としたものである(Tsuiki, TCS 284, pp467-485)。グレイコードはきれいな再帰的な構造を持ち、近似の組み合わせ的な構造の極限として実数空間が定義されている。また、グレイコードを扱うプログラムには、非全域性や非決定性といった実数計算の本質的な性質が自然に現れている。グレイコード、および、それに関連したコードを用いた空間の表現とそれを用いた計算に関して、それらを論理を用いて表現できるか、特に、論理を用いて計算の非全域性や非決定性を表現できるかという問題に興味を持っていた。

論理と計算は密接な関係があり、型理論を用いれば Curry-Howard 対応を通じてプログラムと証明との対応がとれる。それに対し、グレイコードは止まらない計算と並列実行に基礎をおく枠組みなので、型理論との相性は良くない。グレイコードを扱う論理体系は、型理論のように証明の対象となる値や証明とプログラムを同一視するのではなく、両者を明確に区別して、実現可能性解釈を通じて証明と(停止しないかもしれない)プログラムを関係づけることが必要のように思われる。また、再帰的な構造の極限として実数を考えたいので、論理は余帰納的な定義を扱える必要がある。そのような論理体系に、Helmut Schwichtenberg 氏が開発してきた Minlog システムや、Ulrich Berger 氏が主となって研究してきた IFP がある。両氏とも私のグレイコードに関心を示してくれており、また、Cocorn (International Research Staff Exchange Scheme No. 612638) および、Computal (同 No. 294962) といった EU の国際研究プロジェクトで何度かお会いする機会があり、グレイコードをこれらの体系で実現する可能性について議論をすすめてきた。

2. 研究の目的

グレイコードを Minlog および IFP のような論理で扱い、それらにおける証明から、グレイコードを扱うプログラムを抽出したい。そのためには、論理体系そのものを拡張して、非全域性や非決定性を論理的に表現し、それに対するプログラム抽出を考える必要がある。それを通じて、実数構造に関する知見を得るだけでなく、論理の実現可能性解釈とプログラム抽出に関して、新しい知見を得られることが期待できる。

3. 研究の方法

Cocorn, Computal に加えて、ERC (European Union 's Horizon 2020 research and innovation program under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 731143) および、数理論理学とその応用の国際研究拠点形成(日本学術振興会「研究拠点形成事業 A 先端拠点形成型」, 石原哉代表)に加わることができた。当科研費およびこれらの基金を用いて、Schwichtenberg, Berger 氏らと相互交流を行いつつ、研究をすすめた。

最初に、Schwichtenberg 氏と Minlog を用いて pre-Gray code を形式化する研究を行った。その後、Berger 氏と IFP を用いた実数のグレイコード表現に関する研究をすすめた。IFP 研究の当初の目的は、IFP をグレイコードに特徴的な並列性で拡張したシステムを構築することであった。しかし、その中で IFP の健全性の証明が完成し、型システムが導入され、Archimedean Induction をはじめとする様々な Induction / Coinduction scheme が導入され、無限計算に対応した意味論の構築がなされた。そこで、これらの修正をほどこした IFP と、それを用いてグレイコードがいかに表現できるかを示すプログラムの抽出例を加えた論文を、Berger 氏と共同で執筆した。さらに、Petrovska 氏も加わって、IFP の Haskell での実装を行った。

IFP そのものの研究と同時に、グレイコードを引数とするプログラムが必然的にもつ並列実行による非決定性を IFP に加える方法について研究をすすめた。その並列実行のためには、並列実行論理演算子だけではなく、プログラムの部分的正当性を示す演算子も追加する必要があるように思われた。そこで、この2つの論理演算子もつべき実現可能性解釈を考え、そのもとで健全となるような推論規則を考えた。そうしてできた論理の中で、グレイコードを扱う演算子に対応する論理式を考え、その証明から、グレイコードを扱う正しい並列プログラムを抽出することに成功した。一般に実現可能性解釈は、論理に対して計算的な意味を与えるものである。それに対して、ここで行ったのは、並列性、非決定性などのプログラムの実行に現れる概念に対し、そ

れを実現可能性解釈にもつ論理を構成するという、逆向きの研究である。さらに、この論理体系から実現可能性解釈で作られたプログラムの構造は、通常の並列プログラムの書き方とは異なる点があり、プログラミング言語研究としても意義のあるものと思われた。そこで、プログラミング言語の研究集会で発表を目指し、論文執筆を行った。

4. 研究成果

(1) グレイコード計算の論理の研究 (Ulrich Berger, Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg との共同研究)

Pre-Gray code は、2つの代数の相互再帰的構造としてグレイコードの組み合わせ的構造を表現したものである。その代数構造に関する命題の証明からプログラムを抽出する研究を行った。足し算や、pre-Gray code と符号付き2進表現のコード変換に加えて、Pre-Gray code を Modified Gray representation に変換するプログラムの抽出を行った。この変換は、グレイコードを用いた計算の表現能力を示す上で重要な役割を果たしている。これらの証明とプログラム抽出は Minlog 証明支援システムを用いて行なわれた。

(2) Intuitionistic Fixed Point Logic の研究 (Ulrich Berger との共同研究)

IFP (Intuitionistic Fixed Point Logic) は、直観主義一階述語論理に最小不動点、および、最大不動点としての述語定義と、それに対応する帰納法、余帰納法の推論規則を加えた論理である。この論理における証明からプログラムを抽出する機構を構成し、その健全性を証明した。IFP では、公理的に定義された数学的対象を扱う抽象的な証明からのプログラムの抽出を行っており、論理の対象となる実数などの値とプログラムの扱うデータは明確に分離されている。そして、計算的な意味は実数等の値が持つのではなく、各表現を持つことを意味する述語に相対化することにより与えられる。IFP の特徴的な点として、量子子の実現可能性解釈が一様に与えられることと、Harrop(すなわち、計算的でない)論理式の解釈は実現可能性解釈の時点で除去されることがある。それにより、 A が Harrop な時の $A \rightarrow B$ の実現可能性解釈は、 A に対応する型から B に対応する型への関数ではなく、 A が実現可能な時のみ正しい B 型のデータとなる。これにより、 A に停止するための条件を与える形で、停止しないプログラムも実現可能性解釈として得ることができ、未定義部分を含む表現であるグレイコードを出力するプログラムの抽出が可能となる。IFP の実現可能性解釈は再帰的に定義されたドメイン上で行われたため、そのドメイン上の値とプログラムの実行結果が一致しているという Adequacy の性質を示す必要がある。IFP から抽出されるプログラムの計算は無限に続くものなので、そういう状況における Adequacy の定義を行い、帰納法、余帰納法を用いることにより証明を行った。また、グレイコードの計算に対応する論理表現を考える中で、Strong (co)induction, Half strong (co) induction, Archimedean induction などの(余)帰納法の枠組みと、その実現可能性解釈を得ることができた。

さらに、IFP を実装する研究を、Olga Petrovska も加わって行った。Haskell 言語で作られた Prawf というシステムを構築し、その中で IFP 論文の中に書かれた証明を定式化し、グレイコードに関するプログラムの抽出を行った。

(3) Concurrent Fixed Point Logic に関する研究 (Ulrich Berger との共同研究)

IFP を用いると、実数がグレイコードを持つことを余帰納的に表現し、実数が符号付き2進表現を持つならグレイコードを持つことの証明から、符号付き2進表現をグレイコード表現に変換するプログラムを抽出することができた。しかし、その逆変換にあたる、グレイコード表現を符号付き2進表現に変換するプログラムには、グレイコードを読み込むための並列実行が本質的に必要であり、並列プログラムを実現可能性解釈にもたない IFP で抽出することは不可能である。一般に、並列計算にはプロセス間の同期やデッドロックなどの難しい問題が存在し、表示的意味に複雑な領域機構が必要となる。それに対し、本研究のグレイコードを入力するための並列実行 $Amb(M, N)$ は2つのプログラム M と N を同時に実行して、先に出力された方の値を用いるという単純なものである。その並列プログラムの正しさは、 M と N の少なくとも1つは値を出力することと、もしどちらかが値を出力したならそれは正しい値であることの、2つのことから成っている。

Amb は、McCCarthy の非決定的計算演算子 amb を基にしたものであるが、 amb のように局所的に並列計算を行うのではなく、その並列計算の結果を用いる部分まで含んだ大域的な並列計算が行われる枠組みを構築することにし、それにより複雑な領域理論の利用を回避し、この並列実行を実現可能性解釈にもつ論理を構築した。プログラムの表示的意味は、 Amb を通常の構成子とした並列プログラムとしての意味を与える段階と、そのプログラムの並列実行が意味する値の集合を求める段階の2段階で与えられる。プログラムの並列実行が局所的に行われるのではなく、大域的に行われる操作的意味を作り、Adequacy に相当する性質を示した。論理の側では、並列実行により B の意味する値を求められるという実現可能性解釈をもつ、 $Set(B)$ という演算子だけでなく、部分的な正しさと、値がもとまるための

十分条件を合わせた実現可能性解釈をもつ $\text{Rest}(A, B)$ という演算子も導入した。そして、これらの実現可能性解釈に合わせた推論体系を与えることにより、CFP という論理を作成し、この論理のもとで、グレイコードから符号付き 2 進表現の並列的計算が導かれるという証明から、並列に動作するコード変換プログラムが生成されることを示した。

また、グレイコード以外の応用として、ガウス消去法により逆行列を求めるプログラムの抽出を行った。ガウス消去法には 0 以外の要素を探す手順が含まれるが、無限精度計算の枠組みでは、与えられた実数が 0 であることを判別することは不可能であり、実際に 0 でない要素を効率よく探すには、並列実行が必要となる。そのような計算を CFP で表現し、CFP における正則行列に対する逆行列の存在証明から、ガウス消去法のプログラムを抽出した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Berger Ulrich, Tsuiki Hideki	4. 巻 -
2. 論文標題 Extracting total Amb programs from proofs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Programming Languages and Systems (Proc. ESOP 2022, LNCS 13240)	6. 最初と最後の頁 85 ~ 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-99336-8_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Berger Ulrich, Tsuiki Hideki	4. 巻 172
2. 論文標題 Intuitionistic fixed point logic	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	6. 最初と最後の頁 1 ~ 56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apal.2020.102903	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ulrich Berger, Olga Petrovska and Hideki Tsuiki	4. 巻 -
2. 論文標題 Prawf: An interactive proof system for program extraction	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 proceedings of CIE 2020, Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-51466-2_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Berger Ulrich, Miyamoto Kenji, Schwichtenberg Helmut, Tsuiki Hideki	4. 巻 -
2. 論文標題 Logic for Gray-code Computation	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Dieter Probst and Peter Schuster (eds), Concepts of Proof in Mathematics, Philosophy, and Computer Science	6. 最初と最後の頁 69 ~ 110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/9781501502620-005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Berger Ulrich、Seisenberger Monika、Spreen Dieter、Tsuiki Hideki	4. 巻 -
2. 論文標題 Concurrent Gaussian Elimination	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Marco Benini, Olaf Beyersdorff, Michael Rathjen, and Peter Schuster (eds), Mathematics for Computation (M4C)	6. 最初と最後の頁 223 ~ 250
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/9789811245220_0009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計25件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 16件)

1. 発表者名 Ulrich Berger, Hideki Tsuiki
2. 発表標題 Extracting total Amb programs from proofs
3. 学会等名 31st European Symposium on Programming (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideki Tsuiki
2. 発表標題 Combining partial maps into a correct total map through program extraction
3. 学会等名 CCC 2020: Continuity, Computability, Constructivity --- From Logic to Algorithms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hideki Tsuiki
2. 発表標題 Partial program extractions in IFP
3. 学会等名 Mathematical Logic and Constructivity: The Scope and Limits of Neutral Constructivism (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hideki Tsuiki
2. 発表標題 Domains with recursive structures representing a space
3. 学会等名 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (PPICTA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	Swansea 大学			
ドイツ連邦共和国	ミュンヘン大学	ジーゲン大学		