2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１５３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ０００１８

研究課題名（和文）グラフにおける歩道の存在不可能性の証明手法の開発とその応用

研究課題名（英文）Development and application of a method for proving the nonexistence of walks in graphs

研究代表者

神保　秀司（Jimbo, Shuji）

岡山大学・自然科学研究科・講師

研究者番号：００２２６３９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主な目的である「15個以上の点からなる奇数位数の完全グラフのオイラー回路の最短部分閉路長が完全グラフの位数よりも3以上小さい」という命題（以下基礎命題と呼ぶ）の証明への整数計画ソルバー等のソフトウェアの応用手法を広範囲の問題の証明に適用することはできなかったが、本研究の成果として基礎命題の証明の最後の部分に本研究開始時点で含まれていた通常の証明の記述を整数計画ソルバーによる求解に置き換えることに成功した。
さらに、派生研究としてペンタゴというゲームの局面評価の深層学習についての成果が得られた。この研究には、膨大な数のグラフの生成と管理の方法が応用されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義
一般に、グラフ理論の分野の定理を含む理論計算機科学の成果は、平易に述べられていることが多いが、その証明は、多数の難解な概念を含み、それらが絡み合った形で記述されていることがある。それらが平易な概念に基づいた大量の計算、特に整数計画ソルバー等による計算に置き換えられることは、その成果の理解と応用のために望ましい。このことが本研究の目的が達成された場合のその学術的意義である。この目的は達成されなかったが、研究成果の概要の基礎命題の証明の最後の部分を整数計画ソルバーによる求解に置き換えられたことは、一定の成果であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：The main purpose of this research is application of techniques used in the proof of the proposition "The length of any subcycle of an Eulerian circuit of a complete graph of odd order that is 15 or more is less than or equal to n - 3, where n is the order of the complete graph." (hereinafter referred to as the basic proposition) to the proofs of a wide range of problems. Although the purpose has not been achieved, we succeeded in replacing the usual proof description that was included in the final part of the original proof of the basic proposition with finding a solution by an integer programming solver as a result of this research.
Furthermore, research into deep learning of evaluation of game positions of Pentago was done as a derivative research subject. The research includes an application of methods for generating and managing a huge number of graphs.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：離散構造　グラフ理論　不可能性の証明　完全グラフ　オイラー回路

１．研究開始当初の背景

グラフ理論を含む離散数学の分野では定理の証明に計算機を利用することが有効であることが多い。古くはグラフ理論における四色問題の解決 (四色定理の証明) が有名である。この場合、証明の核心部分に計算機による膨大な検証計算の結果が使われている。また、数学の分野では、高性能な計算機を自由に利用できるようになり、それまで困難だった検証計算が大量に行なえるようになったため、従来の形の定理の証明の生産性が飛躍的に上がっている。本研究も計算機を使った証明の効率化を目的とする。

本研究の契機は、グラフ理論に関する次の定理 1 の証明に計算機による検証、特に整数計画ソルバーによる求解が有効だったことである。定理 1 は、概要に述べた基礎命題と同値である。

定理 1 n が 15 以上の奇数であるとき、n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路でそれに含まれる部分閉路の長さがすべて $n-2$ 以上であるものは存在しない。

点で始まり点で終わる点と辺が交互に並んだ列を歩道と呼び、始まりの点を始点、終わりの点を終点と呼ぶ。歩道 W の部分歩道 C (C は W の一部分) が次の条件を満たすとき、C は W の部分閉路であるという。条件: C の始点と終点は同じであり、C に同一の点が 3 回以上現れることはなく、C に始点と終点以外の点が丁度 2 回現れることもない。さらに、始点と終点が同じである歩道で同じ辺が 2 回以上現れないものを回路と呼び、グラフ G の全ての辺を含む回路をオイラー回路と呼び、オイラー回路をもつグラフをオイラーグラフと呼ぶ。研究代表者は、オイラーグラフ G のオイラー回路の最短部分閉路長の最大値をオイラー回帰長と呼んでいる。オイラーグラフ G のオイラー回帰長を $e(G)$ で表し、n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長 $e(K_n)$ を $e(n)$ で表す。この表記法を使えば、定理 1 は、「任意の 15 以上の奇数 n に対して $e(n) < n-2$ が成立つ。」と書き直すことができる。

本研究開始以前に 13 個以下の点からなる完全グラフのオイラー回帰長が計算機実験によりすべて確定しており、さらに、比較的単純な論法により任意の 15 以上の奇数 n について

$$n-4 \leqq e(n) \leqq n-2$$

が成立つことが証明されていたが、それらの証明と定理 1 の証明の間には、かなりの理論上の隔たりがある。定理 1 の証明に有効であった整数計画ソルバーなどの制約充足問題ソルバーの証明への応用技術は、より広い範囲に有効であることが期待された。なお、本研究において任意の 15 以上の奇数 n について $e(n) = n-4$ が成立つことの証明を試みたが現在に至るまで成し遂げられていない。

２．研究の目的

特定の条件を満たす歩道が存在しないことを証明するために、初めに、存在しないはずの歩道が存在したと仮定し、任意の長さになり得る歩道を定数種類の要素からなる数列で表す。本研究の契機となった定理 1 の証明では、特定の条件は、グラフの点の個数を n とおいて $n-3$ 以下の長さの部分閉路が存在しないということであり、その場合、歩道上各点が次に現れるまでの間隔が $n-2$ 以上 $n+3$ 以下になり、これら 6 通りの間隔の並びとして歩道を表すことができる。次に、その数列の上の連続した定数長の任意の部分列が好ましくない条件を満たすことを示し、全体としてもつべき性質との矛盾が導かれる。定理 1 の証明における好ましくない条件は、負の辺の本数が反転配置の数より少なくないことである。ただし、歩道上辺に沿った 2 点の並び順とそれら 2 つの点の直前の並び順が逆転しているとき、その辺を負の辺と呼び、2 点 p と q が歩道上隣接することなく p, q, q, p のように並んでいるとき、左端の p の出現位置を反転配置の開始位置と呼び、右端の p の

出現位置を反転配置の終了位置と呼ぶ。一定の長さの数列すべてが好ましくない条件を満たすことを確かめるには計算機の使用が効果的であるが、特に整数計画ソルバー等の制約充足問題ソルバーが役に立つ。

この証明手法の要点は、本来なら複雑な論法の積み重ねとなる部分を計算機を使った検証計算に置き換える点である。理論研究において、研究者が難解な理論を完全に理解しないと証明の正しさを確認することができず先に進めないという場面に直面することがある。しかしながら、巨大ではあるが有限個の要素からなる集合の各要素に対する検証計算で難解な理論を理解することなく証明の正しさを確認できることがあり得る。従って、上記の証明手法を系統立った形で整備し、それを適用できる離散数学上の問題を開発する試みは重要である。

３．研究の方法

理論面の研究の方法として、第一に、本研究の契機となった、点の個数が 15 以上の奇数 n である完全グラフのオイラー回帰長 $e(n)$ の厳密な決定を試みる。既存の $e(n)$ の上界 $n-3$ を導いた証明手法を理論的に改良し、予想 $e(n)=n-4$ の証明の完成を目指す。第二に、同手法が適用できるグラフ理論の問題の探索を試みる。オイラー回帰長が関連するものに限らず、無限個のグラフのクラスとそれに含まれる歩道に関する制約条件についての多様な組み合せの中から有効な問題を探し出す。

本研究では、証明への計算機の利用が重要であり、特に上記の予想 $e(n)=n-4$ の証明には、15 点からなる完全グラフ K_{15} の小道 (同じ辺が 2 回以上現れない歩道) で最短部分閉路長が 13 以上であるものからなる膨大な探索空間の規模の削減が課題となる。そのために、大量の小道の生成と管理についてのアルゴリズムの開発を進める。

４．研究成果

(1) 学会発表の (10), (9), 論文の (3), 学会発表の (2), 論文の (1) は、本研究における理論面の主な研究目的の一つである定理 1 の証明の改良についてであり、この並びの順に改良が進んでいる。学会発表の (10) は、その時点までの理論的成果を分かり易く説明した形のものであり、学会発表の (2) 及び論文の (1) は、本研究の理論面における最終成果である。学会発表の (9) 及び論文の (3) では、最終成果に準じた結果が与えられているが、明確な誤りを含んでいる。

上記の理論面での改良について述べる。次の式は、論文の (3) における式 (8) である。

$$M(X,Y)+M'(X,Y)>R(X,Y)+R'(X,Y) \tag{8}$$

オイラー回路上の続いて並んでいる 7 個の点に対して、上の式の X は各点がオイラー回路の逆方向に現れる間隔の並びを表し、Y はオイラー回路の順方向に現れる間隔の並びを表す。$M(X,Y)$ は、7 個の点のうち、その点にオイラー回路の順方向に接続している辺が負の辺であるものの個数を表し、$M'(X,Y)$ は、7 個の点のうち、その点にオイラー回路の逆方向に接続している辺が負の辺であるものの個数を表す。$R(X,Y)$ は、7 個の点のうち、その点がオイラー回路上の反転配置の開始位置であるものの個数を表し、$R'(X,Y)$ は、7 個の点のうち、その点がオイラー回路上の反転配置の終了位置であるものの個数を表す。別の言い方をすれば、$R'(X,Y)$ は、7 個の点のうち、その点が元のオイラー回路を逆に辿ったオイラー回路上の反転配置の開始位置であるものの個数を表す。オイラー回路上続いて並んだ 7 個の点の選び方は、点の数だけ存在するが、それらすべてについて論文の (3) における式 (8) の総和をとることによって直ちに矛盾が導かれる。反転配置の個数は、負の辺の個数よりも少ないことは有り得ないからである。一方、学会発表の (10) では、$M'(X,Y)$

と $R'(X,Y)$ を含まない次の 2 つの不等式を導出しそれらから矛盾を導いている。

$$M(X,Y) \geqq 2 \qquad \text{及び} \qquad M(X,Y) \geqq R(X,Y)$$

どちらの不等号も等号を含み制約が弱いため直ちに矛盾を導くことはできない。

なお、学会発表の (4) では、15 個の点からなる完全グラフのオイラー回帰長 $e(15)$ の決定のための計算機実験についての報告がなされ、探索空間を削減するための提案が出されたが、現在に至るまで $e(15)$ の決定の目処は立っていない。現在、研究代表者は、$n \geqq 15$ のとき常に $e(n) = n - 4$ が成り立つことを予想しているが、$e(15) = 11$ は、帰納法による予想の証明における基底になることを期待している。

(2) 次に、本研究から派生した研究の成果について述べる。学会発表の (8), (7), (6), (5) 及び論文の (2) は、完全解析が既に達成されている二人零和有限確定完全情報ゲームであるペンタゴ (Pentago) の局面評価の深層学習に関する研究である。完全解析結果のデータが公表されているため、それを変換することにより容易に訓練データを作成することができる。ただし、精度の高い学習結果を得るためには大量の訓練データの生成が必要であり、そこに本研究における計算機実験で培った莫大な量のオイラー回路の部分小道を生成し管理する技術が活かすことを試みた。

この派生研究の成果として、初手から 12 手前後の局面の評価を単純な構造の一桁程度の層数の 2 次元畳み込みニューラルネットに学習させた場合、約 85%の認識精度が得られた。ResNet の構造をもつ大規模なニューラルネットに学習させたときどの程度まで精度を挙げられるかは、興味深い研究テーマである。

学会発表の (1) は、同様の派生研究であり、学習の対象を完全情報のソリティアカードゲームであるフリーセルとし、訓練データを自作のフリーセルソルバーで生成することを試みている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

(1) Shuji Jimbo and Akira Maruoka, The Upper Bound on the Eulerian Recurrent Lengths of Complete Graphs Obtained by an IP Solver, *International Workshop on Algorithms and Computation*, by Springer, 査読有り, 2019, 199–208, DOI 10.1007/978-3-030-10564-8_16.

(2) Shuji Jimbo, Learning finite functions by neural networks, *RIMS Kôkyûroku*, ISSN 1880-2818, 査読無し, 2096 巻, 2018, 25–31,
URL http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html.

(3) Shuji Jimbo, Search for Eulerian Recurrent Lengths by Using Constraint Solvers, *RIMS Kôkyûroku*, ISSN 1880-2818, 査読無し, 2051 巻, 2017, 52–56,
URL http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html.

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) 神保 秀司, フリーセルの解の存在判定アルゴリズムの設計, 情報処理学会第 81 回 全国大会, 2019.

(2) Shuji Jimbo and Akira Maruoka, The Upper Bound on the Eulerian Recurrent Lengths of Complete Graphs Obtained by an IP Solver, The 13th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation, 2019.

(3) Shuji Jimbo, Kotaro Yamada, Sho Imamura, Kazuki Ueno, and Hiromu Okada, Distribution of solutions of FreeCell, 「代数系、論理、言語と計算機科学の周辺」京都大学数理解析研究所共同研究 (公開型), 2019.

(4) 神保 秀司, 15 点からなる完全グラフのオイラー回路の最短部分閉路長に関する計算機実験, 第 17 回 情報科学技術フォーラム, 2018.

(5) 神保 秀司, 正確な訓練データを使ったニューラルネットワークによるゲーム局面の学習, 第 13 回 組合せゲーム・パズル研究集会, 2018.

(6) Shuji Jimbo, Learning finite functions by neural networks, 「代数系、論理、言語とその周辺領域」京都大学数理解析研究所共同研究 (公開型), 2018.

(7) 神保 秀司, 完全解析結果に基づいた畳み込みニューラルネットワークによるペンタゴの学習, 平成 29 年度 (68 回) 電気・情報関連学会中国支部連合大会, 2017.

(8) 神保 秀司・小林 祐貴, ペンタゴ完全解析結果の活用のためのデータ変換, 電子情報通信学会 2017 年総合大会, 2017.

(9) Shuji Jimbo, Search for Eulerian Recurrent Lengths by Using Constraint Solvers, 「言語、論理、代数系と計算機科学の展開」京都大学数理解析研究所研究集会, 2017.

(10) 神保 秀司, 完全グラフのオイラー回路の性質の証明への計算機の活用, 情報処理学会第 78 回全国大会, 2016.

６．研究組織

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。