

平成 30 年 6 月 23 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K00024

研究課題名(和文)非可換剰余束におけるstateの研究

研究課題名(英文)States on non-commutative residuated lattices

研究代表者

近藤 通朗 (KONDO, Michiro)

東京電機大学・システムデザイン工学部・教授

研究者番号：40211916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：観測問題に由来する非可換剰余束上のstateの研究を進め、非可換剰余束 L に対して、 L 上のstate s が存在すれば、その核 $\ker(s)$ による商代数 $L/\ker(s)$ が可換MV-代数になることを示した。したがって、もっとも広範な非可換剰余束上の観測問題がMV-代数のそれに帰着できることを示した。このような状況のもと、外的な言語(写像)としてのstateではなく、stateの性質を表す演算子 σ を内的言語として導入した σ -剰余束 (L, σ) の代数的性質を考察し、その基本的な結果を学術雑誌に発表した。

研究成果の概要(英文)：In this research programme, I consider some properties of states on non-commutative residuated lattices and prove that for any non-commutative residuated lattice L , if there exists a state s on L , then the quotient structure $L/\ker(s)$ by a kernel $\ker(s)$ of the state s is a (commutative) MV-algebra. Therefore, it follows from this result that the measurement problems in quantum logics reduce to those of MV-algebras. After that, I also consider algebraic properties of residuated lattices L with state operators σ which are not outer languages like mappings but inner ones like modal operators. These structures (L, σ) are called σ -residuated lattices. I got some results about algebraic properties of σ -residuated lattices and published a paper in a journal.

研究分野：数理論理学

キーワード：residuated lattice state

1. 研究開始当初の背景

量子力学における観測問題は、1936年 Birkhoff と von Neumann の歴史的論文により、物理系の確率測度で表現されることがわかった。物理系の確率測度を取り扱う数学は量子構造の理論と呼ばれ、Dvurecenskij らによって精力的に研究がなされている。最も重要な量子構造は物理系の閉部分空間全体からなる Hilbert 空間 (orthomodular 束) であり、空間 (代数) 上の確率測度が観測に対応している。この量子構造における観測問題をより一般的な構造へ拡張する研究が進められている。

一方、ファジイ論理は、データベースやサーチエンジンなど多くの分野で用いられているが、これは命題の解釈を2値の集合 $\{0,1\}$ ではなく、閉区間 $[0,1]$ で行う。ここへの数学的構造の入れ方で MV 論理、BL 論理、MTL 論理など様々な論理が提案され、現在ではこれらの論理を包括した部分構造論理が提案され研究が進められている。部分構造論理は量子論理、多値論理、ファジイ論理などの様々な論理の統一的な理論展開を目指すものである。この論理の最も一般的な代数的意味論が非可換剰余束である。

1995年 Mundici により、ファジイ論理の一つである MV-論理 (可換 MV 代数) 上の確率測度 (state) が定義された。その後、可換 BL 代数、可換 MTL 代数などにおいても state の概念が定義され理論が展開されてきたが、これらの代数は束としていずれも分配束である。分配束である可換剰余束上での state の研究は、量子論理に対応する代数は分配束ではないため、量子力学の観測問題-量子論理 (orthomodular 束) 上の state の研究には原理的に適用できない。このような問題があるにも関わらず、分配的とは限らない非可換剰余束上の state の研究はほとんどない。上述の可換あるいは非可換なこれらの代数の関係は次のように表される。

{MV-代数全体} {BL-代数全体}
{MTL-代数全体} {剰余束全体}

2. 研究の目的

本研究課題では、ファジイ構造や量子構造における state の性質の考察や存在に関する問題を同時に解決するため、非可換剰余束上の state の研究を行う。具体的には、

(A) 非可換な剰余束において、state が存在するための(必要十分)条件を求めること；

(B) perfect な非可換剰余束の構造を決定すること；

(C) local な relative free of zero divisors である非可換剰余束における state の特徴付け定理を得ること；

である。

(A) および(C)について：非可換剰余束においては、一般に state は存在するとは限らず、state の存在問題がその中心課題となる。これまでに、Ciungu により「perfect な relative free of zero divisors である非可換剰余束にはただ一つの state が存在する」ことが示されているが、条件「relative free of zero divisors」は、「perfect な非可換剰余束においては、極大 filter に属さない元は0だけである」ことを意味しており、この条件を弱めない限りこの結果はほとんど自明なものである。perfect よりも弱い概念である local な relative free of zero divisors である非可換剰余束における state の研究を行う。

(B)について：perfect な可換剰余束の構造については、Rachunek, Salounova の結果があるが、非可換な場合にはほとんどわかっていない。そこで、filter を用いてその構造を決定する。これに関して、「任意の非可換剰余束は、prime filter が normal ならば 1-join irreducible な非可換剰余束の subdirect product と同型になる」ので、これをもとに精緻な構造決定を行う。

本研究は、非可換剰余束上の state の性質

を調べることで、ファジイ構造・量子構造に関する研究のほとんどすべてを包括するものである。state が存在すれば、これまでに得た結果から、ほとんどの問題は可換な MV-代数のそれへと帰着できる。また、本研究では分配束を仮定しない代数系における state の研究であるため、得られた結果はそのまま量子構造へと反映できる。したがって、本研究はファジイ構造・量子構造の研究における本質的な問題 (state の存在問題) を明確にし、これら両分野の研究に本質的な方向性を与えることができる。また、一般的な代数系における state の研究は、その代数系に対応する論理における観測問題にも新しい知見を与え、これまで考察されていなかった論理に観測の概念を導入でき、新たな研究分野を生み出すことになる。

3. 研究の方法

これまでの剰余束における state の研究は、多くが可換な MV-代数, BL-代数, MTL-代数など分配束であるものばかりであり, prime filter による表現定理から, MV-代数 (BL 代数, MTL 代数) は, 線形のそれぞれの代数の subdirect product と同型になること, したがって, 線形の MV-代数 (BL 代数, MTL 代数) 上の state の問題に帰着できる。一方, 本研究課題では, 分配束とは限らないしかも非可換な剰余束を対象とする。これまで非可換剰余束の性質を filter を通して調べてきた結果, 次の重要なことを証明した。「非可換剰余束 L において state s が存在すれば, (1) $\ker(s)$ は normal filter になり, (2) $L/\ker(s)$ は可換な MV-代数となる」。これは, これまでの結果「可換な MV-代数 (BL-代数, MTL-代数, *Rℓ-monoid*) における state による商代数は, 可換な MV-代数になる」という結果を, 真の非可換剰余束にまで拡張した最も一般的な結果である。この結果により, 非可換剰余束に state が存在すれば, 線形の可換な MV-代数における state の研究に帰着される

ことがわかった。したがって, state の存在問題の解決が最も本質的で重要な問題となっている。これに関して, perfect な relative free of zero divisors である非可換剰余束には, 唯一つの 2 値の state が存在することを証明した。これは, Ciungu の主定理, 「perfect な relative free of zero divisors である非可換 MTL-代数においては, state が存在する」, を一般化しさらに強めたものである。

上述の目的を達成するため, 非可換剰余束の filter を用いた代数構造を考察する。

具体的方法としては, 非可換な剰余束における state の持つ性質をさらに詳細に検討するため, スロバキアアカデミーの Dvurecenski j 教授など海外研究者とのセミナー, 情報交換・討議を通して研究を進める。セミナーの内容としては, 本研究課題の遂行により得られた結果「剰余束における relative free of zero divisors の特徴付け」, またこれから派生する結果「perfect な剰余束で relative free of zero divisors なものは, ただ一つの Riecan state を持ち, しかもそれは 2 値である」について, 証明の詳細をセミナーを通して検証・検討する。

研究次年度以降では, 初年度同様, 海外研究者とのセミナー, 情報交換・研究打合せを通して, 研究を遂行する。

state には Bosbach state と Riecan state と呼ばれる 2 種類のものがあるが, 非可換な剰余束における Bosbach state は Riecan state となることが知られているため, Riecan state に焦点を絞り研究を進める。非可換な剰余束には state が存在するとは限らないが, 得られた結果である「perfect な relative free of zero divisors である非可換な剰余束には, 唯一つの 2 値の Riecan state が存在し, したがって Bosbach state と一致すること」を証明した。これは, 2016 年に出版された Ciungu に

よる論文の主定理である，「perfectなrelative free of zero divisorsである非可換MTL-代数においては，Riecan stateが存在する」の結果をMTL-代数よりも一般化した代数系に対して示したものである(投稿準備中)．この準備中の論文では，Ciunguにより導入された条件relative free of zero divisorsの特徴付け定理を示したことが，本質的な貢献である．この特徴付け定理は，「perfectな剰余束においては，すべての極大filterの共通部分Rad(X)に属さない元は0だけであること」を示している．そのため，この条件relative free of zero divisorsは非常に強い仮定であることがわかり，この条件の下では，Ciunguの結果はほとんど明らかな結果のように思われる．したがって，この条件を弱めた一般化が重要な問題として残っている．2016年6月にCiungu等による一般化されたstateに関する別の論文が出版されたが，そこでも彼女らはperfectなrelative free of zero divisorsという条件を用いており，しかも非可換MTL-代数上で考察しているので，申請者の特徴付け定理から，この論文の結果は明らかである．すなわち，この条件を弱めない限り本質的な一般化にはならない．そこで，この条件を本質的に弱めた一般化について考察することにする．その際に本研究の先行研究である論文を著したDvurecenski j教授や他の海外研究者を訪ね，意見交換やstateに関する様々な問題についてのセミナー・情報交換を行い，研究活動を進めて行く．このような海外研究者との交流は，今後の研究活動にも大きな影響を与えることになり，その意味でも重要な活動である．

4．研究成果

まず研究初年度では，上記(B)に挙げたperfectな非可換剰余束の構造を決定した．具体的には， X をgoodな非可換剰余束とするとき，「 X がperfectであるための必要かつ十分条件

はdense element全体 $D(X)$ のなすfilterによる商集合 $X/D(X)$ が2値のブール代数 $\{0,1\}$ と同型となること」を証明した．この結果を2016年に札幌で開催された国際会議IEEE ISMVL2016において，題目「Simple characterizations of perfect residuated lattices」として発表した．

また(C)に関しても部分的な結果であるが，チェコ共和国・プラハで開催された国際会議AAA92において，「The radicals of local residuated lattices」という題目で発表し，現在「States and local additive measures on local residuated lattices」として論文投稿中である．

その後，本研究課題遂行に伴い派生したいくつかの問題，reticulationやderivationに関して研究を進めた．具体的には，reticulationの代数的定義における条件を簡略化することができた，この結果から，剰余束のreticulationが，本質的に剰余束の単項filter全体と同型となるがわかった．また，剰余束上のderivationに関して，それが単調であるための必要十分条件を得ることができ，これにより，modular束やブール代数のderivationによる特徴付けを行うことができた．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 10 件)(すべて査読有)

1. M.Kondo, Derivations of commutative residuated lattices, Bull. Iranian Math. Soc., vol.44 (2018),93-100.

2. M.Kondo, Simple axiomatization of reticulational lattices on residuated lattices, Bull. Iranian Math. Soc. vol.43(2017), 943-949.

3. M.Kondo, Generalized state operators on residuated lattices, Soft Computing, vol.20 (2016), 6063-6071

4. M.F.Kawaguchi and M.Kondo, Some Properties of Generalized State Operators on Residuated Lattices, Proc. IEEE

ISMVL2016, 162-166

5. M.Kondo, Simple Characterizations of Perfect Residuated Lattices, Proc. IEEE ISMVL2016, 167-171

6. M. Kondo, Residuated lattices with Galois connections as monadic operators, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, vol.30(2015), 1-7.

7. M.F.Kawaguchi and M.Kondo, Construction of Associative Functions for Several Fuzzy Logics via the Ordinal Sum Theorem, Lecture Notes in Computer Science vol.9376 (2015), 43-53

8. M.F.Kawaguchi and M.Kondo, An algebraic aspect of correspondences between Implicational fragment logics and fuzzy logics, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, vol.19(2015), 861-866

9. M.Kondo, On residuated lattices with universal quantifiers, The Bulletin of the Iranian Mathematical Society, vol.41 (2015), 923-929

10. M. Kondo, Quotient Structures of Non-Commutative Residuated Lattices, 2015 IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, 20-23

〔学会発表〕(計 6 件)(すべて査読有)

1. M.Kondo, Note on derivations of lattices, 93rd Workshop on General Algebra (AAA93), 2017.2.10-12, Bern, Switzerland

2. M.F.Kawaguchi and M.Kondo, Some Properties of Generalized State Operators on Residuated Lattices, IEEE ISMVL 2016, 2016.5-17-20, Hokkaido University, Sapporo

3. M.Kondo, Simple Characterizations of Perfect Residuated Lattices, IEEE ISMVL 2016, 2016.5-17-20, Hokkaido University, Sapporo

4. M.Kondo, Reticulations on residuated lattices, 91st Workshop on General Algebra (AAA91), 2016.2.5-7, Brno, Czech Republic

5. M.Kondo, Quotient structures of non-commutative residuated lattices, IEEE ISMVL 2015, 2015.5.18-20, Waterloo,

Canada

6. M.Kondo, Residuated lattices with Galois connections as monadic operators, CLMPS 2015, 2015.8.3-8, Helsinki, Finland

6 . 研究組織

(1)研究代表者

近藤通朗 (KONDO, Michiro)

東京電機大学・システムデザイン工学部・

教授

研究者番号 : 4 0 2 1 1 9 1 6