

令和元年5月30日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K00030

研究課題名（和文）離散DC関数最小化問題に対する大域的最適化手法の構築

研究課題名（英文）Developing Global Optimization Methods for Discrete DC Function Minimization Problems

研究代表者

塩浦 昭義 (Shioura, Akiyoshi)

東京工業大学・工学院・准教授

研究者番号：10296882

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：離散DC関数最小化問題に対して、解きやすい問題クラスの検出や精度保証付き近似アルゴリズムの構築を目指した。また、DC関数を構成するM凸関数、L凸関数自体の構造をより良く理解することを目的として、M凸関数およびL凸関数の最小化問題という、基本的な問題の再検討を行い、アルゴリズムの改良を行うと同時に、計算量の解析方法の改善を実現した。さらに、離散凸関数の制約なし最小化問題と離散DC関数最小化問題の中間に位置する問題についても調査し、これらの問題の構造を明らかにするとともに、その結果を利用して高速なアルゴリズムを提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題で得られた成果により、高速に解くことのできる離散最適化問題の新たな枠組みを提示できた。また、これまで高速なアルゴリズムが知られていなかった様々な離散最適化問題に対して高速なアルゴリズムを提供できたとともに、高速なアルゴリズムが存在していた問題に対しては、より高速なアルゴリズムを提供できた。これらの研究成果が直接、現実の問題に適用できるとは限らないが、現実の複雑な問題を高速に解くことを目指す際、本研究課題で得られたアルゴリズムの活用が期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we dealt with the discrete DC-function minimization problem, and made an attempt to detect a class of well-solved problems and to devise approximation algorithms with theoretical guarantee. We also aimed at better understanding the structure of M-convex and L-convex functions, and re-consider the minimization problems of M-convex and L-convex functions. For the problems, we improved the existing algorithms as well as their analysis for the running time. Furthermore, we investigated the problems that are in between the unconstrained discrete convex function minimization problem and the discrete DC-function minimization, clarified the structure of the problems, and devised fast algorithms for the problems.

研究分野：離散最適化

キーワード：離散凸関数 離散凸解析 離散DC関数 離散最適化 アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

本研究では、整数格子点上で定義される非線形関数（以下、離散関数）が目的関数として与えられたとき、その関数を最小にする整数ベクトルを求めるという、離散関数最小化問題を考える。これは特殊な離散最適化問題に見えるが、関数の定義域を適切に定めることによって解に対する制約条件を考慮することもできるので、ほぼすべての離散最適化問題を表現できる。そのため、この問題の応用範囲はきわめて広い一方で、一般には効率的に解くことが困難(NP困難)な問題として知られている。

計算困難な問題を解く上で、「解きやすい」問題の構造・性質をよく知ることは必要不可欠である。「解きやすい」離散関数最小化問題の理論的な枠組みを構築することを目的として、「離散凸解析」という理論体系が室田氏(首都大)によって1996年に提唱された。離散凸解析ではM凸関数とL凸関数という2種類の離散凸関数の概念が提案されており、M凸・L凸関数の組合せ構造、アルゴリズム、応用などの面で応募者は室田氏と共同で研究を行ってきた。とくに、アルゴリズム開発については応募者が中心となって研究を進めており、M凸・L凸関数の制約なし・制約つき最小化問題に対して効率的なアルゴリズムを提案してきた。

これまでの成果をふまえ、本研究では離散DC(Difference of Convex)関数と呼ばれる、より広いクラスの離散関数の最小化問題に対して、高性能なアルゴリズムの構築を目指した。離散DC関数とは、離散凸関数の差として表現可能な関数のことであり、連続変数に関するDC関数の離散版として提案された。研究開始当時、離散DC関数最小化の研究は緒に就いたばかりであった。当時の数少ない研究成果として、前原・室田により、離散DC関数最小化の理論的な枠組みが提案され、連続版DC関数最小化のアルゴリズムの自然な拡張が考えられていた。

2. 研究の目的

本研究では、研究代表者のこれまでの研究成果を十分に活用して、離散DC関数最小化問題および関連する問題の大域的最適解もしくは高精度な近似解を高速に求める解法の構築を目指した。具体的には、次の3つの課題を掲げて研究に取り組んだ。

(i) 解きやすい問題クラスの検出: 一般の離散DC計画問題は計算困難な問題であることが知られている一方で、特殊なクラスの離散DC関数に限定すれば、多項式時間で最小化できる可能性がある。そのような離散DC関数のクラスを見つけることを目指した。

(ii) 精度保証付き近似アルゴリズムの構築: より一般の離散DC関数に対し、解の精度を理論的に保証する近似アルゴリズムの構築を目指した。

(iii) 実用的アルゴリズムの開発: 実用面を考慮して、解の理論的な精度保証が出来ない状況でも、大域的最適解または高品質な近似解を求めるアルゴリズムの開発を目指した。

3. 研究の方法

本研究の目的は、離散DC関数最小化問題に対して、理論と実用の両面からみて高性能なアルゴリズムを提案することである。これには、離散数学、整数計画、連続最適化などの分野で培われた技術の利用に加え、新たなアイデアが必要とされる。本研究を成功に導くための方法として、(i) 解きやすい問題クラスの検出、(ii) 精度保証付き近似アルゴリズムの構築、(iii) 実用的アルゴリズムの開発、と3つの課題に大きく分けて、それぞれの課題に対して問題の数理構造の解析を行い、それに基づくアルゴリズムの提案を行った。

また、離散DC関数最小化問題の構造を理解する上で、DC関数を構成するM凸関数、L凸関数自体の構造をより良く理解することが必要であった。そのため、M凸関数およびL凸関数の最小化問題という、基本的な問題の再検討を行い、アルゴリズムの改良を試みると同時に、計算量の解析方法の改善にも取り組んだ。

さらに、離散凸関数の制約なし最小化問題と離散DC関数最小化問題の中間に位置する問題についても調査した。具体的にはL1距離制約の下での最小化問題や、スケジューリング制約をもつ問題を扱った。これらの問題の構造を明らかにするとともに、その結果を利用して高速なアルゴリズムの提案を試みた。

4. 研究成果

平成 27 年度は、「解きやすい問題クラスの検出」という課題の解決に向けて、最小化しやすい離散 DC 関数と最小化が困難な離散 DC 関数の境界を明確にすることを試みた。離散凸解析の理論においては、M 凸関数という離散関数のクラスに関する最適化問題が解きやすいと認識されている。また、2 つの M 凸関数の和についても、最小化問題が多項式時間で解けることが知られている。一方、3 つの M 凸関数の和については、NP 困難であることが知られている。この解きやすい問題と解きにくい問題の境界をより明確にするために、まずは解析しやすい特殊な M 凸関数である、マトロイド階数関数の和で表現される離散関数の構造について調査を行った。M 凸関数の場合と同様に、2 つのマトロイド階数関数の和は最小化しやすいが、3 つの和の場合は最小化しにくいことが知られている。一方、M 凸関数の中にはマトロイド階数関数の和として表現できるものが少なくない。一般の M 凸関数がマトロイド階数関数の和として表現可能かどうかを明らかにすることにより、M 凸関数の解きやすさの構造の解明につなげようと試みた。しかしながら、この命題の証明の完成には至っていない。このように、課題解決につながるようなポジティブな結果は残念ながら得られなかったが、その過程では今後の研究につながるような新たな知見が得られた。

平成 28 年度は、L 凸関数の最小化問題に対するある種のアプローチについて解析を行った。これは、オークション理論からの動機に基づくものである。L 凸関数を最小化する際、解ベクトルの各成分を繰り返し増加させ、その後繰り返し減少させるという、二段階アルゴリズムが適用できることが知られている。これは、複数財のオークションにおける English-Dutch オークションに対応するアルゴリズムである。本研究では、このアルゴリズムの反復回数に対して、厳密なバウンドを得た。これにより、English-Dutch オークションにおける価格変更回数が何回必要か、算定できたことになる。

また、M 凸関数という、もうひとつの離散凸関数のクラスに対し、様々な交換公理により特徴付けできることを示した。この結果は、M 凸関数の持つ様々な良い性質を証明する際に非常に有用となることが期待される。

平成 29 年度は、買い戻し問題というオンライン問題において、目的関数をこれまでの線形関数から非線形関数へと一般化した問題について議論した。目的関数の非線形性により、既存のアルゴリズムの単純な拡張は不可能である。この複雑な問題に対し、離散凸解析における既存の研究成果を利用しつつ、高精度の解を求めるオンラインアルゴリズムを提案した。アルゴリズム自体はシンプルであるが、解の精度評価が難しく、目的関数の性質を巧みに利用して解精度を保証した。この研究成果は離散凸解析理論のオンラインアルゴリズムへの初めての適用であり、インパクトは大きい。

もう一つの研究成果として、処理時間が可変なスケジューリング問題において、処理時間に関して 2 次の評価関数の和を最小化するという問題について研究を行った。これは、ある種のタスクを処理する際に生じる誤差などを最小化する問題に対応する。この問題に対し、解集合が離散凸集合であるという事実を活用すると共に、様々なアルゴリズム技法を適用することにより、高速なアルゴリズムを構築することに成功した。

平成 29 年度後半から 30 年度にかけて、所与のベクトルからの L1 距離が定数以下、という L1 距離制約の下での資源配分問題に対する高速アルゴリズムの開発に取り組んだ。まず、目的関数が分離凸関数であり、制約が成分和一定という等式条件のみという、もっとも基本的な資源配分問題（単純資源配分問題とよぶ）に L1 距離制約を追加した問題について検討を行った。単純資源配分問題の構造を解析し、劣モジュラ資源配分問題とよばれる問題に帰着できることを証明できた。劣モジュラ資源配分問題には直観的に分かりやすいが速度の遅い貪欲アルゴリズムや、貪欲アルゴリズムを高速化したスケジューリングアルゴリズムが既に提案されている。したがって、これらのアルゴリズムに L1 距離制約付きの単純資源配分問題に適用可能であることが分かる。本研究では、貪欲アルゴリズムおよびスケジューリングアルゴリズムを適用したときの高速な実装について検討し、その理論計算時間を解析した。これらのアルゴリズムは原点を初期点とするが、最適解と原点の距離が大きい場合、計算時間が大きくなる、という欠点がある。一方、今回扱う問題においては、最適解は必ず所与のベクトルの「近傍」に存在することが保証されているので、その近傍内の点を初期点とすることにより、計算時間を削減できるのではないか、というアイデアを得た。このアイデアをふまえ、L1 距離制約付きの単純資源配分問題の最適解の性質を調査し、前述の近傍内で最適解の下界となるベクトルを効率的に計算できることを明らかにした。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 10 件)
下記の論文はすべて査読あり

(1)

Satoru Fujishige, Kazuo Murota, and Akiyoshi Shioura:
Monotonicity in steepest ascent algorithms for polyhedral L-concave functions
Journal of Operations Research Society of Japan, 58 (2) (2015), 184-208. (open access)
DOI: 10.15807/jorsj.58.184

(2)

Kazuo Murota, Akiyoshi Shioura, Zaifu Yang:
Time bounds for iterative auctions: a unified approach by discrete convex analysis
Discrete Optimization, 19 (2016), 36-62.
DOI: 10.1016/j.disopt.2016.01.001

(3)

Akiyoshi Shioura:
Algorithms for L-convex function minimization: connection between discrete convex analysis and other research fields
Journal of Operations Research Society of Japan, 60 (3) (2017), 216-243. (open access)
DOI: 10.15807/jorsj.60.216

(4)

Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich:
Machine speed scaling by adapting methods for convex optimization with submodular Constraints
INFORMS Journal on Computing, 29 (2017), 724-736. (open access)
DOI: 10.1287/ijoc.2017.0758

(5)

Kazuo Murota, Akiyoshi Shioura:
Note on time bounds of two-phase algorithms for L-convex function minimization
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 34 (2017), 429-440.
DOI: 10.1007/s13160-017-0246-z

(6)

Shun Fukuda, Akiyoshi Shioura, Takeshi Tokuyama:
Buyback problem with discrete concave valuation functions
Discrete Optimization, 26 (2017), 78-96.
DOI: 10.1016/j.disopt.2017.07.002

(7)

Kazuo Murota, Akiyoshi Shioura:
Simpler Exchange Axioms for M-concave Functions on Generalized Polymatroids
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 35 (2017), 235-259.
DOI: 10.1007/s13160-017-0285-5

(8)

Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich:
Preemptive models of scheduling with controllable processing times and of scheduling with imprecise computation: a review of solution approaches
European Journal of Operational Research, 266 (2018), 795-818. (open access)
DOI: 10.1016/j.ejor.2017.08.034

(9)

Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich:
Scheduling problems with controllable processing times and a common deadline to minimize maximum compression cost
Journal of Global Optimization, (2018), to appear. (open access)
DOI: 10.1007/s10898-018-0686-2

(10)

Norito Minamikawa, Akiyoshi Shioura:

Separable convex resource allocation problem with L1-distance constraint

Journal of Operations Research Society of Japan, (2019), to appear. (open access)

[学会発表](計 10 件)

(1)

Shun Fukuda, Akiyoshi Shioura, Takeshi Tokuyama, "Nonlinear Buyback Problem with Discrete Concave Valuation Functions",

13th Workshop on Approximation and Online Algorithms, University of Patras (Patras, Greece), 2015.

(2)

Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura, "Analysis of L-convex Function Minimization Algorithms and Application to Auction Theory",

Workshop on Rigidity, Submodularity, Discrete Convexity, Hausdorff Research Institute for Mathematics (Bonn, Germany), 2015.

(3)

塩浦昭義, 「L 凸関数の最小化アルゴリズム: 離散凸解析と諸分野との繋がり」,

第 27 回 RAMP シンポジウム, 静岡大学浜松キャンパス (静岡県浜松市), 2015 年 [招待講演]

(4)

塩浦昭義, 「離散凸解析をひろげる」,

日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年春季研究発表会, 慶應義塾大学矢上キャンパス (神奈川県横浜市), 2016 年 [招待講演]

(5)

塩浦昭義, 「複数財に対する繰り返しオークションと離散凸解析の繋がり」,

日本オペレーションズ・リサーチ学会関西支部記念講演会, 関西大学うめきたラボラトリ (大阪市北区), 2017 年 [招待講演]

(6)

Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura, "Time Bounds of Two-Phase Algorithms for L-convex Function Minimization",

10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Eötvös Loránd University (Budapest, Hungary), 2017.

(7)

塩浦昭義, 「離散最適化の基礎としての離散凸解析」,

電子情報通信学会ソサイエティ大会, 東京都市大学 (東京都世田谷区), 2017 年 [招待講演]

(8)

南川智都, 塩浦昭義, 「L1 距離制約をもつ分離凸資源配分問題に対するアルゴリズム」,

第 168 回アルゴリズム研究会, 名古屋工業大学 (名古屋市昭和区), 2018 年

(9)

Norito Minamikawa, Akiyoshi Shioura, "Algorithms for Separable Convex Resource Allocation Problem with L1-distance Constraint",

21st Japan-Korea Joint Workshop on Algorithms and Computation, Hakata Bus Terminal Building (Hakata, Japan), 2018.

(10)

南川智都, 塩浦昭義, 「L1 距離制約をもつ分離凸資源配分問題」,

日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年秋季研究発表会, 名古屋市立大学 (名古屋市瑞穂区), 2018 年

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。