

令和元年6月19日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K00033

研究課題名(和文)費用関数の木距離による近似と最小費用全域木ゲームのShapley値の近似計算

研究課題名(英文) Approximation of cost functions by tree metrics and approximation of the Shapley values of minimum cost spanning tree games

研究代表者

安藤 和敏 (Ando, Kazutoshi)

静岡大学・工学部・准教授

研究者番号：00312819

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では最小費用全域木ゲームのShapley値の2つの近似アルゴリズムを開発した。第一はサンプリングに基づく近似アルゴリズムである。第二は、与えられた費用関数を、関連する最小費用全域木ゲームのShapley値の効率的な計算が可能であるような特殊な費用関数で近似することによって、任意の最小費用全域木ゲームのShapley値の近似を行うアルゴリズムである。さらに、後者の研究に関連して、特殊な費用関数の一種である部分木距離の表現を求めるアルゴリズムを開発した。また、同じく特殊な費用関数である閉路完全距離について、その性質や関連するアルゴリズムの研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で開発したShapley値の近似計算のためのサンプリング・アルゴリズムは、既存研究より少ないサンプル数で近似解を出力することを示した。もう一つは、費用関数の近似によってShapley値の近似計算を行うアルゴリズムである。後者のアルゴリズムも既存の同様のアルゴリズムよりも高精度の近似解を出力することを数値計算によって示した。このような研究はこれまでほとんど行われて来なかったため、学術的な意義は大きい。また、最小費用全域木ゲームのShapley値の計算の厳密計算は現実的には不可能であるため、最小費用全域木ゲームを現実問題に適用する際には、このような効率的なアルゴリズムの存在は不可欠である。

研究成果の概要(英文)：In this study, we have developed two approximation algorithms for computing the Shapley values of the minimum cost spanning tree games. One is an approximation algorithm based on sampling. The other is an algorithm which approximates the Shapley value of the given minimum cost spanning tree games by approximating a given cost function with another "special" cost function, for which an efficient algorithm for computing the Shapley value of the associated minimum cost spanning tree game is available. Furthermore, we have obtained an efficient algorithm for finding a representation of a subtree distance, which is such a special cost function. Also, we studied properties and algorithms for the cycle-complete distance, which is an another such special cost function.

研究分野：離散最適化

キーワード：アルゴリズム 協力ゲーム Shapley値

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) (費用)協力ゲームの理論における中心的な課題は、プレーヤー全体として負担すべき費用をゲームのプレーヤーの間でどのように配分するかということである。各プレーヤーへの費用配分を指定する方法はゲームの解と呼ばれる。Shapley 値はゲームの解の中で最も重要なものの一つであり幅広く研究されている。Bird (1976) によって導入された最小費用全域木ゲームは(費用)協力ゲームの1つのクラスであり、通信網構築問題などの状況において、ユーザ間での適切な費用配分法を分析するためのゲーム理論的モデルとして考えることもできる。最小費用全域木ゲームにおいては、プレーヤーの集合 $N = \{1, \dots, n\}$ に加えて供給者 0 が存在して、各プレーヤー間にリンクを構成するための費用を指定する非負実数値関数 $w: N \setminus \{0\} \times N \setminus \{0\} \rightarrow R$ が与えられている。任意の提携 $S \subseteq N$ に対して、特性関数値 $c_w(S)$ は S の中のプレーヤー同士、あるいは、 S の中のプレーヤーと供給者 0 とを結ぶことによって構成される最小費用全域木の費用として与えられる。最小費用全域木ゲームを上述したような現実的な問題へ応用する際には、ゲームの解の効率的な計算が不可欠であるが、最小費用全域木ゲームに関しては、Shapley 値の計算は現実的には不可能であることが研究代表者 (Ando (2012)) によって示されている。したがって、効率的に計算が可能で、かつ、精度の高い近似解の計算が次善の策となる。最小費用全域木ゲームを含む一般の協力ゲームの Shapley 値の近似計算に対してはサンプリング・アルゴリズムが知られている。しかしながら最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対するサンプリング・アルゴリズムについては、近似精度保証を伴う厳密な理論的解析は研究代表者の知る限り存在しなかった。研究代表者は予備研究(安藤・徳武 (2013))において、任意の近似精度 $\epsilon > 0$ が与えられたとき、 n の多項式によって表される回数のサンプリングを行えば、最小費用全域木ゲームに対するサンプリング・アルゴリズムは近似精度が ϵ 以下であるような Shapley 値の近似解を高確率で出力することを示した。ここで、 w は与えられた費用関数 w の最大値である。

(2) 一般の最小費用全域木ゲームの Shapley 値の計算が困難であるその一方で、与えられた費用関数 w が部分木距離(subtree distance) (Hirai (2006)) である場合には、関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値は、 $O(n^4)$ 時間で計算可能であることが、研究代表者(Ando (2012)) によって示されている。(部分木距離は木距離の一般化である。) 研究代表者他 (安藤・徳武 (2012)) はこれらの結果を用いて、最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する新しい近似アルゴリズムを提案した。このアルゴリズムはまず、与えられた費用関数 w を超距離または木距離によって近似したものを w' とする。次に w' に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値を上述した多項式時間アルゴリズムで厳密計算したものを、元の費用関数 w に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似解とするものである。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似アルゴリズムについて研究する。この近似アルゴリズムの第一はサンプリングによるものであり、研究代表者他の予備研究 (安藤・徳武 (2013)) に基づく。提案したサンプリング・アルゴリズムに関する予備実験の結果、与えられた近似精度を達成するために必要な理論的に算出されたサンプル数と実験的に得られた必要なサンプル数とは大きな隔りがあることが分かった。この原因は、必要とされるサンプル数の導出において、比較的荒い分析を行なっているためである。本研究においてより精緻な分析を行うことによって、与えられた近似精度を達成するために必要なサンプル数をより小さくして計算時間の短縮を図る。

(2) もう一つの近似アルゴリズムは、研究代表者他 (安藤・徳武 (2012)) のアルゴリズムのアイデアに基づくものである。安藤・徳武 (2012) は、提案する近似アルゴリズムの性能を評価するための数値実験を行ったが、近似誤差についての定量的な評価という観点からは不十分なものであった。つまり与えられた費用関数に対して、近似アルゴリズムがどれだけの精度の解を出力するかという近似精度保証が与えられていなかったからである。この問題を解決するために、与えられた費用関数の木距離からの乖離度と近似精度との関係を数値実験によって明らかにすることを目的とする。また、このアルゴリズムの近似精度をさらに改善するために、与えられた費用関数を木距離や超距離とは異なる費用関数によって近似することも検討する。

3. 研究の方法

(1) 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対するサンプリングによる近似アルゴリズムの高速化とその実験的評価

研究代表者他の予備研究 (安藤・徳武 (2013)) で提案したサンプリング・アルゴリズムに対してより精緻な分析を行い、与えられた近似精度を達成するために必要なサンプル数がより小さくて済むようなアルゴリズムの開発を行う。この結果、サンプリング・アルゴリズムはより短い時間で精度の高い近似解を出力することができる。

(2) 費用関数の木距離による近似に基づく最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似の実験的評価

安藤・徳武 (2012)において提案した近似アルゴリズムの性能を評価するために、与えられた費用関数の木距離からの乖離度と近似精度との関係を数値実験によって明かにする。近似精度の評価は研究の方法 (1)のサンプリング・アルゴリズムの出力との比較によって計算される。この数値実験は大学院生 A が行う。

(3) 部分木距離を表現する木を求めるアルゴリズムの開発

Hirai (2006)は木距離の概念を一般化する部分木距離の概念を導入した。有限集合 X 上で定義される費用関数 w は、もし重み付き木 T と X の要素によって添え字付けされた T の部分木の集合 $\{T_x \mid x \in X\}$ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して $w(x, y)$ が T における T_x と T_y 間の距離であるとき、部分木距離と呼ばれる。部分木距離は、系統学などにおいて木距離よりも記述能力の高い系統樹のモデルとしてその研究の発展が期待される。与えられた部分木距離の表現を求めるアルゴリズムの開発は、この研究において基本的かつ重要な課題である。Hirai の定理 (Hirai (2006)) によって与えられた費用関数 w が部分木距離かどうかを判定するための多項式時間アルゴリズムが得られるが、 w を表現する木 T と部分木の集合 $T_x (x \in X)$ を求めるためのアルゴリズムは知られていない。本研究では、費用関数 w が部分木距離であるときに、 w を表現する木と部分木の集合を見出す効率的なアルゴリズムを開発する。

(4) 費用関数の部分木距離による近似理論とそれに基づいた最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似アルゴリズムの開発

研究の方法(3)で開発された部分木距離の表現を求めるアルゴリズムを用いて、任意の費用関数を部分木距離で近似するアルゴリズムを与える。与えられた費用関数に対して、このアルゴリズムの出力を w' とする。研究の方法(2)と同様にして、研究代表者の開発したアルゴリズム(Ando (2012))によって、費用関数 w' に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値を多項式時間で厳密計算したものを、元の費用関数 w に関連する Shapley 値の近似値とする。研究の方法(1)のサンプリング・アルゴリズムによって近似精度を算出して、近似精度と入力費用関数の部分木距離からの乖離度との比較を、大学院生 A が数値実験により行う。

(5) Shapley 値が多項式時間で厳密計算できる最小費用全域木ゲームのクラスの拡張

$\{0, 1\}$ -値費用関数 w は、 $w(i, j)=0$ であるような枝 $\{i, j\}$ から成るグラフがコーダル・グラフであるとき、コーダル費用関数と呼ばれる。Ando (2012) は、まずコーダル費用関数に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値が多項式時間で計算できることを示し、さらに、任意の部分木距離 w は、有限個のコーダル費用関数の非負結合として表されることから、部分木距離に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値が多項式時間で計算できることを導出している。Ando (2012) の結果は、 $w(i, j)=0$ であるような枝 $\{i, j\}$ から成るグラフがコーダル・グラフより弱い性質を持つ場合にも関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値が多項式時間で厳密計算可能であることを示唆している。 w がこのような場合に w に関連する最小費用全域木の Shapley 値の厳密計算アルゴリズムの定式化と計算時間の解析を行う。

(6) 最小費用全域木ゲーム以外の Shapley 値に対するサンプリングによる近似アルゴリズムの高速化とその実験的評価

重みつき多数決ゲームの Shapley 値に対する近似アルゴリズムとしてのモンテカルロ・サンプリングは、理論的な分析が成されているが、これ以外の協力ゲームについてはほとんど理論的な研究が行われていない。重みつき多数決ゲーム以外の協力ゲームについて、その Shapley 値に対するサンプリングに基づく近似アルゴリズムの理論的性質を明らかにすることによって、サンプリングに基づく近似アルゴリズムの応用可能性を拡大する。

4. 研究成果

(1) 部分木距離を表現する木を求めるアルゴリズムの開発 (研究の方法(3))。与えられた費用関数が部分木距離かどうかを判定し、もしそうであるのならばそれを表現する木と部分木の集合を出力する。 $O(n^3)$ 時間アルゴリズムを開発した(学会発表, 学会発表, 雑誌論文)。ここで、 $n=|X|$ である。後に、その研究で得られたものよりさらに高速な $O(n^2)$ 時間アルゴリズムも開発した(その他, 学術雑誌に投稿中)。後者のアルゴリズムは計算時間の下界も達成しているため最適な時間計算量を持つ。

(2) 研究の方法(5)に関連する研究「閉路完全既約費用関数と閉路完全解に対する効率的なアルゴリズムの開発」を行った(学会発表, 雑誌論文)。Trudeau (2012) は最小費用全域木ゲームに対する閉路完全解と呼ばれる解概念を導入し、閉路完全解はいくつかの望ましい性質を満たすことを示した。Trudeau は Ando (2012) の結果に基づいて閉路完全解が $O(n^4)$ 時間で計算できることを示唆した。ここで、 n はプレイヤーの数である。閉路完全解は与えられた費用関数 w から定義される閉路完全既約費用関数 w^* に関連する最小費用全域木ゲームの Shapley 値である。本研究では閉路完全既約費用関数 w^* に対するいくつかの特徴付けを与え、これらの特徴付けに基づいて w^* を求めるための $O(n^2 \log n)$ 時間アルゴリズムを得た。さらに閉路完全解を求めるための $O(n^2 \log n)$ 時間アルゴリズムを与えた。

(3) 研究の方法(4)に関連する研究「最小増加超距離木問題に対する局所探索アルゴリズムの開発」を行った(学会発表, 雑誌論文). 本研究では, 最小増加超距離木問題に対して, 2分木の变形操作に基づいた局所探索アルゴリズムを開発した. また, 開発したアルゴリズムの性能を数値実験によって検証した. その結果, 現実的な時間内で計算できることを示した.

(4) 研究成果(2)から派生した研究「閉路完全距離の指標付き準階層構造による特徴付け」について研究を行った(学会発表). 準超距離は指標付き準階層構造と呼ばれるクラスタリング・システムと一対一に対応する. この研究では, 閉路完全距離が準超距離の特殊な場合であることに着目し, 閉路完全距離を対応する指標付き準階層構造によって特徴付けた. 閉路完全距離は今後, 系統学やクラスター解析の分野においてさらなる発展が期待される.

(5) 研究の方法(1)「最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対するサンプリングによる近似アルゴリズムの高速化とその実験的評価」を行った(学会発表, 学術雑誌に投稿中). まず, 最小費用全域木ゲームの限界費用ベクトルの成分について 既存研究よりもタイトな下限を与えた. これと Hoeffding の不等式によって, 既存研究(安藤・徳武(2013))よりも少ないサンプル数で, 最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似計算が可能であることを示した.

(6) 研究の方法(2)「費用関数の木距離による近似に基づく最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似の実験的評価」, 及び, 研究の方法(4)「費用関数の部分木距離による近似理論とそれに基づいた最小費用全域木ゲームの Shapley 値の近似アルゴリズムの開発」に関連する研究を行った(学会発表, 雑誌論文). 具体的には, 与えられた費用関数をコーダル費用関数の非負結合によって近似することによって Shapley 値の近似計算を行うという方法を開発した. コーダル費用関数の非負結合による近似は, 木距離による近似と部分木距離による近似の中間に位置する手法である. 数値実験の結果は, この方法に基づく Shapley の近似は, 木距離により近似に基づく Shapley 値の近似よりも高い近似精度を達成することを示している.

< 引用文献 >

- C.G. Bird, On cost allocation for a spanning tree, A game theoretic approach, Networks, Vol. 6, 1976, 335-350.
安藤和敏, 徳武忠俊, 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似手法の提案とその近似精度の実験的評価. 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2012 年春季研究発表会, 2012 年 3 月.
K. Ando, Computation of the Shapley value of minimum cost spanning tree games: #P-hardness and polynomial cases, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 29, 2012, 385-400.
安藤和敏, 徳武忠俊, 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対するサンプリングによる近似アルゴリズム, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会, 2013 年 3 月.
H. Hirai, Characterization of the distance between subtrees of a tree by the associated tight span, Annals of Combinatorics, Vol. 10, 2006, 111-128.
C. Trudeau, A new stable and more responsive cost sharing solution for minimum cost spanning tree problems, Games and Economic Behavior, Vol. 75, 2012, 402-412.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

- 高瀬光一, 安藤和敏, 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似アルゴリズム, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 2108, 2019, 95-114.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2108.html>
Kazutoshi Ando, K. Sato, An algorithm for finding a representation of a subtree distance, Journal of Combinatorial Optimization, 査読有, Vol. 36, No.3, 2018, 742-762. DOI: 10.1007/s10878-017-0145-x
Kazutoshi Ando, Ryosuke Inagaki, Kazuya Shoji, Efficient algorithms for subdominant cycle-complete cost functions and cycle-complete solutions, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 225, 2017, 1-10. DOI: 10.1016/j.dam.2017.03.007
石川累, 安藤和敏, 最小増加超距離木問題に対する局所探索アルゴリズム, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 2027, 2017, 15-29.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2027.html>

[学会発表](計 7 件)

- 安藤和敏, モンテカルロ法による最小費用全域木ゲームの Shapley 値の計算, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2019 年春季研究発表会, 2019 年 3 月.
高瀬光一, 安藤和敏, 最小費用全域木ゲームの Shapley 値に対する近似アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所研究集会「高度情報化社会に向けた数理最適化の新潮流」, 2018 年 8 月.

安藤和敏, 正治和也, 閉路完全距離の指標付き準階層構造による特徴付け, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会, 2018 年 3 月.

安藤和敏, 佐藤公紀, 部分木距離の表現を見出すためのアルゴリズム, 日本応用数理学会 2016 年度年会, 2016 年 9 月.

石川累, 安藤和敏, 最小増加超距離木問題に対する局所探索アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化技法の最先端と今後の展開」, 2016 年 8 月.

Kazutoshi Ando and Koki Sato, An algorithm for finding a representation of a subtree distance, 4th International Conference on Combinatorial Optimization, Vietri sul Mare, Italy, May 2016.

安藤和敏, 稲垣亮祐, 正治 和也, 最小費用全域木ゲームの閉路完全解について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年春季研究発表会, 2016 年 3 月.

[その他](計 1 件)

Takanori Maehara and Kazutoshi Ando, Optimal Algorithm to Reconstruct a Tree from a Subtree Distance, CoRR, 2019. <https://arxiv.org/abs/1902.08742>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 前原 貴憲

ローマ字氏名: (MAEHARA, Takanori)

所属研究機関名: 国立研究開発法人理化学研究所

部局名: 革新知能統合研究センター

職名: ユニットリーダー

研究者番号(8桁): 20751407

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 佐藤 公紀

ローマ字氏名: (SATO, Koki)

研究協力者氏名: 稲垣 亮祐

ローマ字氏名: (INAGAKI, Ryosuke)

研究協力者氏名: 正治 和也

ローマ字氏名: (SHOJI, Kazuya)

研究協力者氏名: 高瀬 光一

ローマ字氏名: (TAKASE, Koichi)

研究協力者氏名: 石川 累

ローマ字氏名: (ISHIKAWA, RUI)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。