

平成 30 年 6 月 21 日現在

機関番号：82616

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K00065

研究課題名(和文) ブロック・リサンプリング法による2群の平均比較法の開発とその応用に関する研究

研究課題名(英文) Developments and applications for comparing the means of two groups using block resampling

研究代表者

櫻井 裕仁 (SAKURAI, Hirohito)

独立行政法人大学入試センター・研究開発部・准教授

研究者番号：00333625

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、2群の母集団分布が未知で、各群が縦断的データとして与えられる場合について、2群の平均に差があるか否かを検討するための統計的仮説検定法に関する研究を行った。本研究で対象とした2群の平均比較の問題において、いくつかのブロック・リサンプリング法の適用可能性を明らかにした。また、各群のサンプルサイズが比較的小さい場合においても、従来の方法よりも検出力の高い検定法をいくつか構築することができた。

研究成果の概要(英文)：We considered statistical hypothesis testing methods for detecting the difference of two means when the population distributions of two samples are unknown and each sample is observed as longitudinal data. Our research showed that some block resampling methods are applicable to the problem for comparison of two means, and that the testing methods using block resampling methods are superior to a traditional method in power even when sample sizes are relatively small.

研究分野：統計科学

キーワード：block resampling moving block bootstrap circular block bootstrap stationary bootstrap

1. 研究開始当初の背景

2 群のデータが観測されているときに、2 群の平均に差があるか否かという問題に関心のあることが多い。このような問題は、統計的推測の問題として定式化が行える。例えば、各群のデータ（観測値）に対して、観測値は平均（期待値）と誤差に加法的に分解できるという回帰モデルを想定すると、2 群の平均の比較の問題として扱うことができる。しかし、回帰モデルの誤差項に対して正規性の仮定が置けない場合、さらには各群のデータが互いに独立に同一の分布に従う（i. i. d.）という仮定が妥当でない場合、上述した 2 群の平均の有意差検定を行うための検定統計量の帰無仮説の下での分布（以下では帰無分布と呼ぶ）の導出は、一般には極めて難しく、本研究の開始当初には、このような研究はあまり多く行われていなかった。

2. 研究の目的

上記 1 の項で述べた問題を解決するために、本研究では、データが i. i. d. ではない場合について、特に縦断的データの場合を検討の対象とし、2 群の平均が等しいか否かを判断するための検定法の開発とその応用に関する研究を行うことを目的とする。現実のデータ解析に応用する場合には、母集団や標本が得られる構造に関する仮定等はできるだけ少ないほうがよい。本研究ではより実用的な方法を開発すること、特に、母集団分布に特定の分布形を仮定しない検定法を開発することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 問題の定式化

観測される 2 群のデータ形式として縦断的データを想定する。ただし、このようなデータが与えられる場合には、

- 2 群に対応のない縦断的データ
- 2 群に対応のある縦断的データ

の 2 つの場合に分けて議論を進める必要がある。上記の研究はある程度なされているため、本研究では上記の場合に検討の対象を絞り、研究を進める。

本研究では、上記の場合に各群のデータ（観測値）に対して、

$$\text{観測値} = \text{平均} + \text{誤差}$$

という回帰モデルを仮定し、上記 1 の項で述べた問題を、2 群の平均（回帰関数）の有意差検定の問題として扱う。すなわち、帰無仮説：2 群の平均は等しい、対立仮説：2 群の平均は異なる、という統計的仮説検定の問題として定式化する。ただし 2 群の誤差項は、いずれも平均 0 で有限な分散をもつと仮定す

る。

(2) 検定統計量の帰無分布の近似法の検討

上記 2 の研究目的の項で述べたような検定法の開発の際には、次の 3 点を考慮した。すなわち、2 群の母集団分布に特定の分布形を仮定しないこと、2 群のデータとして対応のない縦断的データの場合を想定していること、我々が観測できる 2 群のデータは 2 群の母平均が等しいという帰無仮説のもとで得られるものではないこと、の 3 点である。これらに関しては、次のような方法で対処した。

まず  $T$  に関しては、母集団分布に特定の分布形を仮定せず、かつ、各群において想定している隣り合うデータ間の相関構造をできるだけ崩さないで統計的推測を行えるブロック・リサンプリング法を用いることにした。その中でも特に、Moving Block Bootstrap (MBB) 法 (Kuensch, 1989)、Circular Block Bootstrap (CBB) 法 (Politis and Romano, 1992)、Stationary Bootstrap (SB) 法 (Politis and Romano, 1994) というブロック・ブートストラップ法に着目して研究を進めた。

次に  $T$  に関しては、検定のサイズや検出力の観点から妥当と考えられる検定統計量を選択し、選択した検定統計量の帰無分布の近似法に関する研究を行った。最終的には、次の 4 種類を用いることとした。すなわち、各群の平均系列の差の絶対値の和 ( $T_1$ )、各群の平均系列の差の 2 乗和 ( $T_2$ )、各群の平均系列に挟まれる部分の面積の推定量 ( $T_3$ )、Hall and Hart (1990) の統計量 ( $S_n$ ) の 4 種類である。これらに基づく検定法の性質は、後述する研究成果の項でまとめる。

<引用文献>

Hall, P. and Hart, J. D. (1990). Bootstrap test for difference between means in nonparametric regression, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 1039 - 1049.

Kuensch, H. R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations, *Annals of Statistics*, 17, 1217 - 1241.

Politis, D. N. and Romano, J. P. (1992). A circular block-resampling procedure for stationary data, *Exploring the Limit of Bootstrap* (eds. LePage, R. and Billard, L.), Wiley, 263 - 270.

Politis, D. N. and Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap, *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1303 - 1313.

#### 4. 研究成果

本研究では、上記3の項で述べた方法に基づいて研究を進め、大別して次の2つの研究成果が得られた。

- ・CBB法およびSB法を利用した検定法の開発
- ・MBB法、CBB法、SB法を利用した検定法の性質の比較

以下では、それぞれについての概要をまとめる。

##### (1) CBB法およびSB法を利用した検定法の開発

CBB法とSB法は、従来、推定問題において用いられることが多かったが、本研究ではこれらを上述した検定問題に適用し、その適用可能性を明らかにした。

長さ  $n$  の系列が2群でそれぞれ  $q_1$  個と  $q_2$  個観測されているとする。この場合、CBB法を利用した検定のアルゴリズムとして、以下のものを考案した。次の手順(a)~(i)はCBB法を利用した検定のアルゴリズムであるが、SB法を利用する方法も同様である。

- 各群において、 $q_1$  個と  $q_2$  個に基づく平均系列を計算する。
- 手順(a)から検定統計量の実現値を計算する。
- 各群の平均系列をそれぞれの平均系列の平均で中心化する。
- 手順(c)で得られた系列をCBB法と同様にしてブロックに分割し、各群で  $n$  個のブロックを得る。
- 手順(d)で得られたブロックを合併し、 $2n$  個のブロックの集合を得る。
- 手順(e)で得られたブロックの集合から、複数個のブロックを無作為非復元抽出し、2群に対応するリサンプルを構成する。
- 手順(f)で得られたリサンプルに基づき、検定統計量を計算する。
- 手順(f)と(g)を適当な  $B$  回繰り返し、 $B$  個の検定統計量を計算する。
- 手順(b)と(h)から、 $p$  値のモンテカルロ近似値を計算し、それが与えられた有意水準以下であれば、帰無仮説を棄却する。

上記の手順(i)に基づいて計算される検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った。その結果、CBB法とSB法を利用した検定法に関しては、いずれも、名目上のサイズを維持し、また多くの場合、従来の方法と比較して検出力の高い検定法を構成できる、という知見が得られた。ここで、シミュレーション結果の一例を図1と図2に示す。図1と図2の縦軸は検出力、横軸は後述する  $c$  の値であり、これらのグラフに対応するシミュ

レーションは次のような設定で行われている。

- ・2群の平均：0と  $c$  とする。ただし、 $c$  は  $0 < c < 1$  とする。
- ・2群の系列の長さ： $n=10$
- ・2群の系列数： $(q_1, q_2)=(20, 20)$
- ・各群の誤差項：平均が0の1次の自己回帰モデルを与え、自己回帰係数は0.1、誤差項は平均0、分散3の正規分布に従うとする。
- ・検定のサイズ・検出力を計算するために、以上の設定を満たす2群(初期標本)を独立かつ無作為に2000組与える。
- ・リサンプリング回数： $B=2000$
- ・ブロックの長さ：名目上のサイズを維持するように取る。
- ・名目上の検定のサイズ：0.05
- ・検定統計量：上記3の(2)で述べた  $T_1 \sim T_3, S_n$  の4種類
- ・既存の方法：Bowman and Young (1996) による検定法(以下、BY法と略記する)を比較の対象とした。

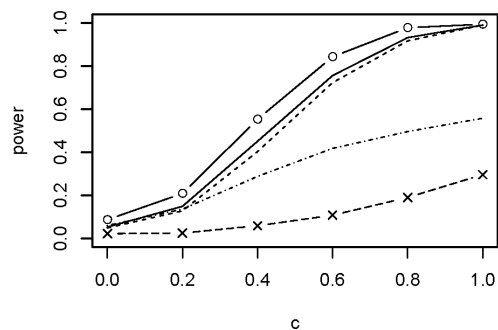


図1：CBB法を利用した検定法の検出力関数の比較(点線は  $T_1$  を、実線は  $T_2$  を、 $\square$  付きの実線は  $T_3$  を、1点破線は  $S_n$  を、 $\times$  付きの破線はBYを、それぞれ表す)

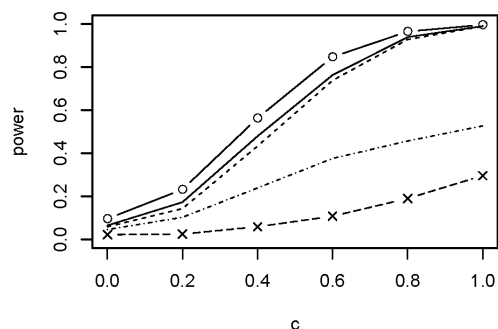


図2：SB法を利用した検定法の検出力関数の比較(各線は図1と同様である)

シミュレーションを行った結果、以下の知見が得られた。

##### 検定のサイズについて

- 提案した方法による検定のサイズは、名目上のサイズを維持する傾向にある。

- (b) 誤差項の自己回帰係数が0以下のときは、提案した方法による検定のサイズと名目上のサイズとの差は小さいが、正の場合は差が大きくなる場合がある。

#### 検出力について

- (a) 提案した方法による検出力は、従来の方法 (BY 法) のそれよりも高い。特に、2群の母平均の差が大きくなるにつれて、その傾向は顕著である。
- (b) 提案した検定法で用いた4つの検定統計量について、検出力が最も高くなるのは  $T_3$  を用いた場合であり、以下、 $T_2, T_1, S_n$  の順に検出力が高くなる傾向がある。
- (c) 各群で系列の個数  $q_1, q_2$  が増えるにつれ、検出力が高くなる。
- (d)  $0 < c < 1$  の範囲では、多くの場合、 $T_2$  と  $T_1$  による検出力はほぼ同じであるが、 $T_2$  の方が若干高くなることもある。

#### (2) MBB 法, CBB 法, SB 法を利用した検定法の性質の比較

上記(1)の項では、CBB 法と SB 法を利用した各検定法の性質をまとめた。次に本項では、ブロック・リサンプリング法の1つである MBB 法も検討の対象に含め、MBB 法, CBB 法, SB 法の3つの方法を利用した検定法の間で、検定のサイズと検出力のそれぞれを比較すると、どのような関係にあるのかをまとめる。

#### 検定統計量を固定した場合の検出力関数の比較

検討の対象とした4つの検定統計量のうちの1つに着目し、上記(1)の項でまとめた検定の手順(a)~(i)のうち、手順(d) (ブロックの分割方法) を、

手順(c)で得られた系列をブロックに分割し、各群でブロックを得る。ブロックの分割方法は、MBB 法, CBB 法, SB 法のいずれかと同様する。

とすることにより、MBB 法, CBB 法, SB 法の3つの方法を利用した検定法を統一的に扱うことができ、これらの間の性質の比較を行うことができる。

図1と図2を得たのと同様な設定により、検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った。図3に、検定統計量として  $T_3$  を利用し、リサンプルを無作為非復元抽出により得る場合の、MBB 法, CBB 法, SB 法を利用した検定法の検出力関数を比較したグラフの一例を示す。

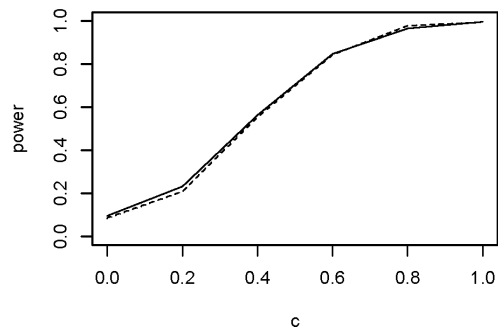


図3: 検定統計量を固定した場合の検出力関数の比較(上図は検定統計量  $T_3$  を適用した場合である。点線は MBB 法を、破線は CBB 法を、実線は SB 法を、それぞれ利用した検定法に対応しているが、3つの折れ線はほぼ重なっている)

#### リサンプルの抽出方法を変えたときの検出力関数の比較

上記(1)の項でまとめた検定の手順(a)~(i)のうち、手順(f) (リサンプルの抽出方法) に着目すると、リサンプルは非復元抽出により構成されており、これは並べ替え検定に相当する検定法である。しかし、もともとの MBB 法, CBB 法, SB 法では、復元抽出によりリサンプルが構成されている。そこで、本研究では、検定統計量とブロックの分割方法を固定したときに、リサンプルが復元抽出または非復元抽出されると、両者の間で検定のサイズと検出力がどの程度異なるかについての検討を行った。この場合には、手順(f)を、

手順(e)で得られたブロックの集合から、複数個のブロックを無作為復元抽出または無作為非復元抽出し、2群に対応するリサンプルを構成する。

とすればよい。図4に、検定統計量として  $T_3$  を利用し、ブロックの分割方法を CBB 法と同様にして、リサンプルを無作為復元抽出および無作為非復元抽出した場合の検定法の検出力関数を比較したグラフの一例を示す。図4も、図1~3と同様な設定により得られている。

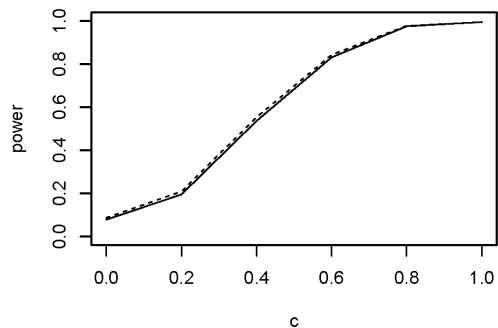


図4: リサンプルの抽出方法を変えたときの検出力関数の比較(上図は検定統計量  $T_3$  を適用し、ブロックの分割方法として CBB 法と同様にして)

様にした場合である。実線は復元抽出の場合に、破線は非復元抽出の場合に、それぞれ対応しているが、2つの折れ線はほぼ重なっている)

### (3) まとめ

本研究では、対応のない2群のデータが縦断的データとして与えられている場合に、各群の母集団分布に特定の分布形の仮定を必要としない、2群の母平均の有意差検定法を開発した。隣り合うデータ間の相関構造の情報をブロック・リサンプリング法により取り入れることにより、各群の系列の長さが短い場合にも、従来の方と比べて検出力の高い検定法を構成することができた。

2群の平均比較の問題は、様々な研究分野において現れ、観測されるデータの形式やデータの背後に仮定されるモデルも多種多様である。本研究では縦断的データの場合を検討の対象としたが、本研究の成果は、例えば、医学、薬学、経済学の分野をはじめとして、現実の統計解析に資する点もあると考えられる。

今後はさらに研究を進め、例えば、誤差項が本研究で扱ったものよりも複雑な場合の検定のサイズ・検出力の検討、より合理的と考えられる検定統計量の検討、ブロックの長さの選択法などを検討することも必要であると考えている。特に最後の点に関しては、ブロック・リサンプリング法を用いた現実のデータ解析を行う際に重要な点であると考えられる。

### <引用文献>

Bowman, A. and Young, S. (1996). Graphical comparison of nonparametric curves, *Applied Statistics*, 45, 83 - 98.

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### [雑誌論文](計2件)

Sakurai, H. and Taguri, M. (2016). Test of mean difference in longitudinal data based on block resampling approaches, *Proceedings of COMPSTAT 2016*, 205--215. (査読有)

Sakurai, H. and Taguri, M. (2015). Comparison of block bootstrap testing methods of mean difference for longitudinal data, *Proceedings of the 60th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, ISI2015*, 6 pages. (査読無)  
[http://www.isi2015.org/components/com\\_users/views/registration/tmpl/media/uploadedFiles/paper/51/611/STS011-](http://www.isi2015.org/components/com_users/views/registration/tmpl/media/uploadedFiles/paper/51/611/STS011-)

P1-S.pdf

#### [学会発表](計3件)

Sakurai, H. and Taguri, M. Comparison of tests of mean difference in longitudinal data based on block resampling methods, IASC-ARS/NZSA 2017: Joint Meeting of 10th Asian Regional Section (ARS) of the International Association for Statistical Computing (IASC) and the NZ Statistical Association (NZSA) (at University of Auckland, Auckland, New Zealand), 2017年12月14日発表 (Invited Session).

Sakurai, H. and Taguri, M. Test of mean difference in longitudinal data based on block resampling approaches, COMPSTAT 2016, 22nd International Conference on Computational Statistics (at Auditorium/Congress Palace Principe Felipe, Oviedo, Spain), 2016年8月24日発表.

Sakurai, H. and Taguri, M. Comparison of block bootstrap testing methods of mean difference for longitudinal data, International Statistical Institute, The 60th World Statistics Congress (at Riocentro, Rio de Janeiro, Brazil), 2015年7月31日発表 (Special Topic Session: Recent theories and applications on semiparametric and nonparametric statistical inference).

#### [図書](計1件)

桜井 裕仁(訳) (2016). 時系列のためのブートストラップ法, 時系列分析ハンドブック(北川源四郎, 田中勝人, 川崎能典監訳), 朝倉書店, 第1章, 3 - 31.

### 6. 研究組織

- (1) 研究代表者  
桜井 裕仁 (SAKURAI, Hirohito)  
独立行政法人大学入試センター・研究開発部・准教授  
研究者番号: 00333625
- (2) 研究分担者  
汪 金芳 (WANG, Jinfang)  
千葉大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号: 10270414
- (3) 研究協力者  
田栗 正章 (TAGURI, Masaaki)