

令和元年6月19日現在

機関番号：32632

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K02017

研究課題名(和文)無限の構造分析と力学系の概念分析 - ニュートン、ライプニッツから作用素環論まで

研究課題名(英文)Structural analysis of infinite and conceptual analysis of dynamical system:
from Newton and Leibniz to theory of operator algebra

研究代表者

原田 雅樹 (HARADA, Masaki)

清泉女子大学・付置研究所・教授

研究者番号：90453357

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：量子力学は、物理量の非可換性を明らかにしたが、同時期、Banach-Tarskiのパラドクスのような非可換の無限群や測度論に関わる問題が見出されていた。量子物理学の数学的基礎付けを目指しながら作用素環論を生み出したフォン・ノイマンはまた、パラドクスを生み出さないためのamenabilityという無限群の良い性質を導入した。作用素環論は関数解析から派生したものだが、後に、ガロワ群の考え方や力学系が非可換化されながら合流し、その中で、amenabilityが有限次元近似できる無限次元作用素とも深くかかわることなどが明らかにされた。この事実は、数学の哲学を実行するうえで非常に興味深いことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学の哲学というと、その基礎付けを巡って論理学、集合論、そして最近では圏論について論じられることが多く、その中で、構造やパターンといった概念を用いながら数学的対象の実在性や本質が論じられる。しかし、数学の哲学は、実際に行われている数学や数学史と離れてしまっている。その中で、フランスの「概念の哲学」に連なる数学の概念史をたどりながら、そこに哲学的分析の鋸を入れる方法論は、近年、英米圏の哲学においても重要性を帯びてきている。本研究は、その方法論を作用素環論における無限次元の構造分析に適用したものである。このような方法による数学の哲学、そして科学哲学が実行されることが期待される。

研究成果の概要(英文)：While quantum mechanics has made visible the noncommutativity of physical quantity, problems concerning noncommutative infinite groups and measure theory, such as the Banach-Tarsky paradox, have been found. Von Neumann, who devised the theory of operator algebras aiming at providing a mathematical foundation for quantum mechanics, introduced a good property of groups, named amenability, which enables avoidance of the paradox. The theory of operator algebras was originally derived from functional analysis, but the dynamical systems such as ergodic theory, noncommutatively modified, join to it automorphic group and its normal subgroup, which originated in Galois theory. As a result, amenability has become better understood, as is deeply related to infinite dimensional operators that can be approximated by finite dimensional operators. This matter provides an interesting contribution to the philosophy of mathematics, which is related to the development of concepts in the sciences.

研究分野：科学哲学

キーワード：概念の哲学 概念史 作用素環論 非可換幾何学 無限次元

1. 研究開始当初の背景

(1) フランスの哲学者 J. Cavailles の導入した「概念の哲学」の方法論を用いてガロワ理論に哲学的分析を加えた Vuillemin (1962) の後、その方法を継承する著書として 20 世紀の抽象代数学と数学基礎論、論理学の関係をその概念史を通して論じた Sinaceur (1991) や、関数解析を測度論や積分論といった解析学に線形代数的な構造を見出す過程としてとらえた Michel (1992) などがある。最近では、英語圏の哲学においても、Hacking (2014) が代数学と幾何学といった数学の異なる領域の間における概念や方法の応用や、Descartes の流れをくむ Grothendieck の明証性を求める数学と Leibniz の流れをくむ Voevodsky の計算による証明を重視する数学の二つの異なる傾向について論じている。さらに、数学の数学たる所以は証明なのか応用なのかといった問題について Platon や Kant の哲学を用いながら論じている。その上で、実際に行われている数学と現代の数学の哲学の間に広がる距離について説明している。

Vuillemin, Jules (1962), *La Philosophie de l'algèbre*, PUF ; Sinaceur, Hourya (1991), *Corps et modèles*, Vrin; Michel, Alain (1992), *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Vrin; Hacking, Ian (2014), *Why is there Philosophy of Mathematics?*, Cambridge.

2. 研究の目的

(1) Michel (1992) にあるように、20 世紀初頭に発展を遂げた関数解析は、解析学の線形代数学化として考えられる。測度の変換理論である Radon-Nikodym の定理は、その一例である。このような関数解析の背景のもと、量子力学の数学的基礎づけに動機づけられながら、von Neumann は 1930 年代に作用素環論を創始することになる。その時代はまた、数学の基礎についての研究が活発に行われ、Sinaceur (1991) が中心的テーマとして取り上げる抽象代数学が勃興する時期とも重なっていた。さらに、同時期、数学の基礎付けに大きく関わる無限の問題に関して Banach-Tarski のパラドクスが生じていた。このパラドクスは非可換の無限群や測度論、選択公理に関わるものであるが、無限群が von Neumann の導入した amenability という性質を持つ場合には生じないパラドクスである。この amenability という性質は作用素環論において大きな役割を果たすことになる。作用素環論は無限次元の線形代数とすることができるが、その理由によって無限次元の量子力学である場の量子論の数学的基礎付けのために作用素環論を用いる試みがなされてきたのもこの理由による。量子力学との関係もあり、作用素環論において、古典的な様々な数学概念が「非可換化」されるといわれる。本研究では、Vuillemin (1962) や Sinaceur (1991)、Michel (1992) の仕事を引き継ぐ形で、「概念の哲学」の一環として、作用素環論における無限次元の構造について哲学的分析を施すことを目的とする。

(2) Leibniz の「無限小」に依拠した微積分と、Newton の力学系に基づいた流率法の発想の違いとその関係性も視野に入れながら、Leibniz の「無限小」概念に連なる 1960 年代の Robinson の超準解析の発想や、力学系の重要な一部をなすエルゴード理論が作用素環論の中でどのような役割を担っているかを明らかにする。作用素環の一部である von Neumann 環は、非可換可測空間論であり、そこでの非可換エルゴード理論や超準解析から発想を得た超積が無

限次元の構造の解析に重要になるのである。さらに、それは非可換確率論を構成するが、その条件付き期待値はある von Neumann 環の部分環を作り出す。これは subfactor といわれるが、これは現代の代数学において重要な役割を果たしているガロワ理論の類似の理論となっている。関数解析から派生した作用素環論であるが、このように、解析学、代数学、確率論、力学系が拡張され、「非可換化」されながら、干渉しあい、新しい数学概念を生成している。そして、その干渉の結集として、有限次元近似できる無限次元作用素環の性質が A. Connes によって明らかにされたのである。Hacking (2014)が代数学と幾何学の関係で示した数学の異なる領域間での応用というものをさらに広げ、具体的に示していくことを本研究は目的とする。

(3) 一般に、ノルム位相で閉じているバナッハ環にある性質を付加した作用素環を C*環といい、これは非可換位相幾何学といわれる。それよりも弱い位相(強位相や弱位相)で閉じている作用素環を von Neumann 環といい、これは非可換可測幾何学といわれる。幾何学的空間を点集合として把握するのではなく、その上の代数ないし関数の集合として把握するのは現代数学の潮流である。その考え方には、可換 C*環を、ある作用素のスペクトルを選び出す character 空間上の連続関数環と同型であることを示した Gelfand 変換、この可換 C*環上の有限生成される射影加群がこの空間上のベクトル・バンドルと同型であることを示した Serre-Swan の定理が大きく影響している。まさに環が空間を規定することを示し、その考え方は層や Grothendieck によって導入されたトポスの理論としてさらに一般化される。環を非可換化するとは非可換空間を構成することであると言われる所以はここにある。非可換空間とはいわば非可換環を空間として見ることによって生まれる仮想空間である。A. Connes は、作用素環に位相が閉じることを要求せず、非有界作用素であるディラック作用素を導入しつつ、古典的微分幾何学で重要な役割を果たす De Rham コホモロジーと類似のサイクリック・コホモロジーを導入しながら、非可換可微分多様体を構築する。さらに、Connes はコンパクト作用素を無限小として考えたり、ディラック作用素の逆作用素を無限小距離として考えたりすることで、計量をいれて非可換微分幾何学を構築する。ここでは、距離はア・プリアリに空間に入れられるのではなく、ディラック作用素によってダイナミカルに入るものとなる。この非可換微分幾何学によって、Connes は場の量子論を用いた素粒子の標準模型の再構成を試みる。この非可換微分幾何学の構成は、von Neumann 環にエルゴード理論が組み入れられたこととともに、作用素環論にダイナミカルな本質を持つ幾何学的観点が取り入れられたこととして見ることができる。本研究は、この作用素環論における幾何学的観点の特性を顕わにすることも一つの目的とする。

3. 研究の方法

(1) Vuillemin (1962)、Sinaceur (1991)、Michel (1992)を読んで概念の哲学の方法について学びつつ、竹崎正道(1983)、『作用素環の構造』、岩波書店; Connes, Alain (1994),

Noncommutative Geometry, Academic Press; Kerre, David and Li, Hanfeng(2016), *Ergodic Theory*, Springer などの中に現れる数学的概念に対して哲学的分析を施す。

4 . 研究成果

(1) Michel (1992)は、関数解析における測度論、Lebesgues 積分、スペクトル分解などをめぐる概念史に対して哲学的分析をほどこしている。その書によると、関数解析は解析学に代数的手法を取り入れ、そのことにより、解析学的概念、特に無限概念の構造分析を可能にした。

20 世紀初頭、数学の基礎付けの問題と繋がりながら、無限について様々な病的現象が見出されていたが、その一つが Banach-Tarski であった。関数解析において重要な貢献をした Banach がこのパラドクスの発見に関わっていることから分かるように、関数解析が明らかにした測度論の代数的構造や、Sinaceur (1991)が扱うような抽象代数学の中で生まれた非可換な無限群 (自由群) といった概念があって初めて Banach-Tarski のパラドクスが見つかり、その性格付けが明らかになったと言える。Von Neumann は、可測空間の任意の領域に作用させても不変な測度が存在するという性質を持つ群を amenable な群として導入する。群が amenable であるということは、Banach-Tarski のパラドクスが生じないということと同値である。逆に、そのような測度が存在しない自由群のような場合には、パラドクスが生ずる。

(2) von Neumann 環はノルム位相よりも弱い位相で閉じている作用素環であるが、完全束をなす射影作用素の性質から、可換なものはルベグ可測空間と等価になる。それを拡張して非可換な von Neumann 環をも考えることで、非可換積分論が構成される。この際、積分は代数的なトレイスの無限次元化として理解されるという関数解析の事実が用いられる。すなわち、測度に対応するエルミート作用素 (量子統計力学の密度演算子) を von Neumann 環の元にかけてそのトレイスをとるという演算が weight であり、それが非可換積分ということになる。さらに、この weight をとる演算を時間発展的に不変にするモジュラー自己同型群や、weight に時間発展的に変換をほどこす Cocycle differential (非可換 Radon-Nikodym の定理) が導入されることで、力学系が構成される。これらの群構造によって von Neumann 環の構成する非可換可測空間に非可換エルゴード理論が考えられる。ところで、古典的エルゴード性とは、各点の動きが空間全体を一様に覆い尽くすように作用する一パラメータ群 (時間) の性質のことであるが、これは可測空間の任意の二つの部分が一様に混合するように作用する amenable な群の性質でもある。

どんな部分も全体と同型となるという通常の集合論にはない無限次元を持つ III 型 von Neumann 環は、II 型 von Neumann 環と実数の接合積に書けるが、この II 型 von Neumann 環の中心 (可換部分環) にモジュラー自己同型群を作用させた際の周期性の分類によって、III 型 von Neumann 環の構造分析が可能になったのである。そこでは、力学系的な自己同型群の周期の特徴づけ (エルゴード的な周期的でないような場合も含めて) が用いられている。この III 型の分類は、作用素環論における自己同型群そしてそこにある正規部分群の構造の重要性を

明らかにした。この自己同型群の性質を駆使し、超準解析に由来する超積の考え方も取り入れながら、II型、III型の中で有限次元の行列の有限テンソル積で近似できるという良い性質を持つ作用素環（AF環）の分析がなされた。さらに、AF環であるということは、その持つ群構造がamenableであるということ、すなわちBanach-Tarskiのパラドクスが生じないことと同値であり、さらにそれは群の作用によって均等な混合を行うエルゴード性と深くかかわるReiter特性と同値であることもConnesらによって明らかにされた。

(3) ガロワ群の概念の誕生を哲学的に明らかにすることで、対象の捨象による操作概念の顕在化させたVuillemin(1962)について、「ヴェイユマン『代数学の哲学』とスピノザ『エチカ』の幾何学的秩序」（『主体の論理・概念の倫理』、以文社、2017所収）を、私は2016年度に執筆した。本研究課題の一つは、無限概念が関数論（ライプニッツ的）と力学系（ニュートンの）とにおいていかにあられ、統合化されているかを解明することである。作用素環論においてCocycle differencialという関数解析に力学系の視点を取り入れた概念によって明らかになった無限の構造の中に、ガロワ理論によって明らかにされた正規部分群の構造が見いだされるが、このことについて注目し、数学の概念史の中に位置づけることは、Vuilleminの思想の延長という意味でも興味深いことである。

また、20世紀のフランスの哲学者であり、Vuilleminにも大きな影響を与えたAlbert Lautmanの論文を他の研究者と翻訳した（現在、出版社に原稿を提出する段階である）。Lautmanの思想はプラトン主義的であり、弁証法が非常に重要な概念となっている。数学の概念においては、例えば数論において代数的な側面と解析的な側面が弁証法的に干渉しながらより本質的なイデア的なものに向かっていくという。この代数的な側面と解析的な側面の干渉という考え方は、非常に重要なことである。

(4) 超準解析を生み出したRobinsonの動機は、Leibnizによる無限小の概念を正確な数学的対象とすることである。Leibnizは、無限大ないし無限小を記号的認識によるものと理解した上で、それら表現する対象が有限世界のシステムに組み込まれていると考えている。また、連続律は位置の原理ではなく、推移の原理であり、そこでは有限が無限を表現する。

作用素環論を出発点として非可換幾何学を構築したConnesは、作用素環論においてコンパクト作用素が超準解析における無限小のように見なせることに着目する。すなわち、ある作用素にコンパクト作用素を加えても本質的には同じとみなせる。ここでヒルベルト空間上の作用素として表現されたコンパクト作用素とは、有限次元を除いた作用素のサイズが任意の正の数よりも小さくなるような作用素のことである。このコンパクト作用素の概念を用いて、フレドホルム加群を導入することで、非可換化された微分幾何学というものを考えることができるようになる。古典的な微分幾何学において、多様体の局所的な性格と大域的な性格との間に対応を与えるAtiyah-Singerの指数定理というものがあるが、サイクリックコホモロジーやK理論を用いて非可換化されたAtiyah-Singerの指数定理というものを構成することができる。

さらに、コンパクト作用素の概念を用いて、Dirac 作用素を導入することで、計量を入れた非可換空間を構成する。すなわち、Dirac 作用素の逆作用素を無限小距離として考えるのである。このようにスピン構造を伴うダイナミカルな Dirac 作用素によって入れられた計量の入った空間概念を Connes は考える。彼は、二重の層になった通常の微分幾何的構造（ゲージ理論）を持った空間を考え、その二枚の層の間に非可換で離散的な距離構造を入れた幾何学的構造によって、素粒子の標準模型の再構成・再解釈を試みている。ヒッグス機構を考慮しながら、それぞれの層に、電磁気力と弱い相互作用を対応させたり、右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンを対応させたりしながらそれをなすのである。

(5) 以上のように、Hacking (2014)の主張する数学の異なる領域間での応用といったことを作用素環においてもっと多様なそして具体的な形で確認することができる。さらに、そこでは Michel (1992)が哲学的分析を施した関数解析と、Sinaceur (1991)が分析を施した抽象代数とが、力学系や幾何学、さらには数理物理学まで巻き込んで様々に干渉しあいながら、新しい数学概念を生成していることが見て取れる。すなわち、代数学、解析学、関数論、確率論、力学系、幾何学といった様々な数学の分野に関わりながら、作用素環論はハイブリッドに構成されているのである。もし、Kant 的な形式を用いるならば、量、質、関係、様相といった諸カテゴリーに対応する形で解析学、代数学、関数論、確率論があり、それらが時間に関わる力学系と空間に関わる幾何学によって媒介され、図式化されることで、数学概念が生き生きと生成され、数理物理学、さらに物理学におけるモデルないし理論に適用されることができると考えられるかもしれない。

5 . 主な発表論文等

学会発表 4 件、図書 1 件

[学会発表]

- ① Masaki HARADA, *Philosophy of Operator Algebra: Understanding of Infinite through Algebraic Structure and Dynamics*, 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Helsinki, 2015 年 8 月 7 日。
- ② 原田雅樹「コンヌの非可換微分幾何学と素粒子の標準模型」、科学基礎論夏のセミナー、北海道大学、2017 年 9 月 29 日。
- ③ Masaki HARADA, *From Infinitesimal in Classical Geometry to Compact Operator in Noncommutative Geometry*, 日本ライブニッツ協会 Workshop, 2017 年 11 月 20 日。
- ④ 原田雅樹「現代の数理物理学における領域横断的な理論の発展」、2019 年度科学基礎論学会総会と講演会、金沢大学、2019 年 6 月 15 日。

[図書]

- ① 原田雅樹「ヴェイユマン『代数学の哲学』とスピノザ『エチカ』の幾何学的秩序」、上野修ほか編『主体の論理・概念の倫理』、以文社、2017 所収、pp. 133-159。