

令和元年6月10日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04405

研究課題名(和文) 小学校から中学校への移行期の生徒の関数的思考の進展を促す継続的な授業のデザイン

研究課題名(英文) Design of lessons that foster students functional thinking in the transitional period from primary to lower secondary school

研究代表者

日野 圭子 (Hino, Keiko)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：70272143

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、中学校1年生を対象に、比例・反比例の単元においてデザイン研究(第1サイクル1校、第2サイクル2校)を行い、授業を通しての生徒の変容を捉えた。そのために、関数的思考の要といえる、伴って変わる2量の共変関係、および、対応関係についての生徒の推論を、6つの段階から捉える学習軌道を構築し、授業を通しての全体的な傾向とともに、学習する内容やGeoGebraを用いた授業の手立てとの関係を考察した。また、ディスコースの側面からも考察を行った。得られた結果に基づいて、関数の学習指導と評価への示唆を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

関数的思考の進展を評価する視点の構築が出来たのは1つの成果である。また、事後調査から、共变的推論がより活発に観察されたクラスにおいて、生徒のグラフの理解が進んでいる様子が見られた。「対応」中心の指導の現状に対して、本研究で示した手立てを通して、現象を解析する力の育成の可能性が見出された。一方、GeoGebraの授業実践への取り入れ方がクラスによって異なった。ここからは、新たなリソースを授業に効果的に取り入れる上で、教師のニーズや関心を問題とし、共同で省察を行うことが重要であることが分かった。

研究成果の概要(英文)：Aiming at students' functional thinking, the purpose of this study was to design mathematics lessons of proportion and inverse proportion in the seventh grade (the first year of lower secondary school) and to grasp students' progressions of reasoning during classroom teaching. In doing so, a model of learning trajectory on proportion and inverse proportion was constructed, which clarified different qualities (6 stages) with respect to looking at and reasoning with covariation and correspondence between two quantities. By using the model, the study examined overall learning paths through 19 or 20 consecutive lessons and furthermore, their relationships with specific mathematical content as well as tools (GeoGebra software) and interventions being incorporated into the lessons. Examinations were also made from the aspect of mathematical discourse. On the basis of the results obtained, implications for teaching and evaluation on functional thinking were made.

研究分野：数学教育学

キーワード：関数的思考 デザイン研究 学習軌道 数学的談話 数学教育

1. 研究開始当初の背景

本研究は、平成 22～25 年度の科学研究費補助金・基盤研究(C)(一般)による研究『小学校と中学校の接続の観点からの比例的推論の進展の契機の探究』(研究代表者：日野圭子)の継続としての面を有している。前科研の研究の中で提案した中学校 1 年の「比例と反比例」の単元の授業を、実際に公立中学校において実施しているためである。研究開始当初、提案した授業デザインの実施に関して、3 つの課題があった。第 1 は、生徒の数量関係の捉え方の進展をどう評価するかに関わるものである。第 2 は、教室でのディスコースの視点からの分析であり、第 3 は、動的な数学ソフトウェアを用いた学習環境の取り入れである。本研究では、これらの課題や関心事について検討を進めながら、デザイン研究を行うこととした。

2. 研究の目的

「中学校 1 年生を対象に、比例・反比例の単元においてデザイン研究を行い、授業を通しての関数的思考の進展を捉え、関数の学習指導と評価への示唆を得る。」

その際、関数的思考の進展を 2 つの側面からみていく。1 つは、関数的思考における要といえる「変化」と「対応」に関わる推論の側面である。ここでは、本研究が対象とする比例、反比例に関わっての学習軌道(learning trajectory)を設定し、生徒の「変化」「対応」に関わる推論の質がどう進展しているかを捉える。他の 1 つは、ディスコースの側面である。中学校での比例、反比例についての語り方は、小学校での語り方からどう変化するか。ここでは、数学的談話の変容の視点を提供しているコモグニション論(Sfard, 2008)を参照し、特に、比例や反比例が、数量関係の特徴を伴って語られていたかどうかをみる。

3. 研究の方法

- (1) 関数的思考の進展を捉える先行研究を考察し、本研究を進めるにあたって、学習軌道とディスコースの 2 つの側面での枠組みをそれぞれ構築する。
- (2) 研究方法論としてデザイン研究について調べ、授業の実践や改善を行うにあたっての手順を確認する。
- (3) デザイン研究の第 1 サイクルを実施し、授業の改善の方向性について検討・修正したプランを、第 2 サイクル(メイン部分)において実施する。第 2 サイクルでは、
 - (ア) (1)で構築した 2 つの側面から、実施した授業の考察をする。
 - (イ) 生徒の事前、事後調査の結果からも、関数的思考の進展の状況を確認する。
- (4) 研究を振り返り、成果および課題についてまとめる。

4. 研究成果

(1) について

近年、関数的思考は代数的思考との関わりで捉えられている。幾つかの先行研究をもとに、本研究では関数的思考を、伴って変わる 2 つの数量の関係に注目し、その関係を構築し、一般化して使うこと、また、その関係自体を数学的対象として扱い役立てることと考える。そこには重要な推論として、共変と対応に関わる推論が含まれる。また、Pegg & Tall (2010)、Sfard (2008)等をベースに数学的概念の発達を捉え、比例や反比例の概念の構成では、個々の数値の計算というプロセスから、徐々にそのプロセスが凝縮化・記号化され、記号が 2 量の関係全体を表し、実体として操作されるようになるかと考える。

これらを踏まえ、本研究では、上述したように、関数的思考の進展を 2 つの側面から捉える。以下では、学習軌道による進展の側面に関わっての考察結果を述べる。

学習軌道とは、ある学習目標に向けて、心的過程や行為を発生させるために設計された一連の課題を通して推測される、子どもの思考や学習の記述である。一方、学校数学において、伴って変わる2量間の関数関係の規則性を捉える上で、共変関係と対応関係が区別されている。横に延びた表に対する見方を考えると、共変関係は、表に表れている2つの数量の関係を横に見る見方(変化の見方)、対応関係は縦に見る見方(対応の見方)を指している。

本研究では、関数の学習軌道の先行研究に基づいて、中学校1年の比例・反比例の学習において、どのような生徒の推論の質が区別できるかを考えた。そして、以下の6つの段階を、「比例・反比例の学習軌道」として推測した。

<変化に関わる推論の質>

伴って変わる2つの量の調整が行われる以前の段階

伴って変わる2つの量の調整が始まる段階

累加ベースの共变的な推論の段階

チャンクによる共变的な推論の段階

<対応に関わる推論の質>

手続きベースの対応的な推論の段階

対応的な推論の段階

(2)について

生徒の「学習の経過についての仮説」を活かしつつ、数学的課題や学習活動の組織化の方針を得るために、Harel (2010)によるDNRの指導原理(Duality, Necessity, Repeated reasoning)を参照した。特に、関数的思考の促進ため、関数を、探究の観点を与える見方、考え方としても扱い、

- ・伴って変わる2量に対する「変化」と「対応」の見方、考え方
- ・伴って変わる2量の表現方法としての表、式、グラフ
- ・一貫性や整合性といった統合を重視する考え方(関数に限らない)

という観点に基づいて、現象を見て、調べて、意味づける活動をデザインした。

授業では、主として3つの手立てを取り入れた。

- ・ GeoGebraを使用する：関数の見方、考え方には、伴って変わるという2量の「動き」が本質的に含まれている。この「動き」を可視化するために、GeoGebraを取り入れ、タブレットを用いた演示を所々で行っていく。
- ・ 「比例一族」などの擬人化モデルを利用する：「動き」の主語(即ち、比例についての動き、反比例についての動きであること)に注意を向けるための1つの工夫として、比例、反比例を主語にした語りの実現を目指し、「比例一族」「反比例一族」「関数一族」といった擬人化モデルを利用する。この発想は、大谷らの研究(大谷他, 2014; Nunokawa et al., 2015)に基づく。動いている人物(比例、反比例)とその姿(表、式、グラフ)を区別し、教師に意識して語ってもらう。
- ・ 関数、比例、反比例の集合の関係を図化する：集合の関係図をワークシートとして配布し、学習する関数の例や性質を継続的に書き込みながら、学習を進める。

単元計画は、ここでは省略するが、平成22~25年度科研での提案に、上記の観点から修正を加えたものを作成した。デザインした授業は、栃木県内の公立中学校において行った。2015年には、公立中学校1校において、第1サイクル(PDCA)を行った。授業者には、上記の授業プランをシナリオの形で提案した。翌年の第2サイクルでは、改善したプランを公立中学校2校各1クラス(以下、A校、B校と呼ぶ)で実践した。

(3)について

ア．学習軌道からの考察

A, B 校では, すべての授業(A 校は全 20 時間, B 校は全 19 時間)をビデオカメラで記録した。1 台はクラス全体の様子である。もう 1 台は, A 校は 1 つのグループ(4 名)の活動, B 校は 2 名の注目生徒の活動を主に記録した(音声の記録も随時行った)。授業で用いたワークシート等も適宜収集した。収集したデータからは, 授業過程の概要ならびに簡略化された発話記録を作成し, 変化や対応に関する教師や生徒の語りに注目して分析を進めた。

表 1, 2 は, 学習軌道として設定した ~ の段階が, A, B 校の授業の中でどのように確認できたかを網掛によって示し, まとめたものである。

表 1 : A 校の授業中のやりとりの中で観察された各段階

時	関数		比例										反比例						応用	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

表 2 : B 校での授業のやりとりの中で観察された各段階

時	関数		比例										反比例						応用	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	

網掛は, 当該の段階の発話が, 教師あるいは生徒によって観察されたことを示す。

表 1, 表 2 から, どちらのクラスでも, 二量の変化についての語りは, 反比例の授業と比べると, 比例の授業で活発に観察された。これは, 比例に比べると, 反比例は変化で見ることが難しいためかもしれない。また, 表 1 と表 2 を比べると, A 校の方が変化に関わる発話が多いことが見て取れる。変化については, どちらのクラスでも, ~ の段階の語りが確認された。では, 「1 秒で 2m」, 「1 分毎に 12 ずつ...」等の他, 「同じペースでコツコツ」, 「ゆっくりで, 速くなる」等の言い方もみられた。ただし, これらの言い方が, GeoGebra による動的な演示の場面でみられたかについては, クラスによって違いがあった(A 校の方が演示の場面でみられた)。一方, A 校, B 校どちらにおいても, の段階の語りが少ないことは注目に値する。反比例ではこの段階は観察されなかった。は, ある変数の変化の大きさが 1 以外についても, 再単位化を行うことで, 他の変数の変化の大きさを柔軟にイメージしていく段階であり, そこでは割合を明示的に使うことが必要となる。どちらのクラスでも, 有理数倍を用いて変化を語る機会は, あまりなかったと言える。

対応については, A, B 校ともに が比例, 反比例を通して活発に見られ, も同様であった。

では, (i) y/x あるいは xy が常に一定になっていることを話す, (ii) x から y を作る上で比例定数

がどのような影響を与えているかを話す、という指標を作った。反比例の定義に基づいて特徴が正当化されている場面では、新しい談話への移行の一端を確認できた。

B校では、掌サイズの小型ビデオカメラも使いながら、2名の注目生徒に対する授業中の追跡を行った。エピソードの分析を通して、変化の見方と対応の見方に関わって、教師の意図と生徒の実際(嗜好)との間に、二重の齟齬がみられた。教師は、対応の見方を中心に置くが、生徒は変化の見方に注目がある。また、教師は、抽象的な場面で説明をするが、生徒は日常事象での問題解決の方が積極的に取り組む。また、 x, y という文字と、変化の見方とが結びついていないことが、幾つかの場面で観察された。対応が中心の授業は、生徒にとっては難しく、また、彼らが力を発揮する変化の見方が十分に活かされていないようであった。

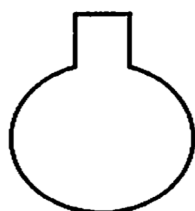
イ. 事前・事後調査からの考察

A校、B校の生徒に対して、比例や共变的推論に関わる調査を事前と事後に行った。以下は、その中の2問である。

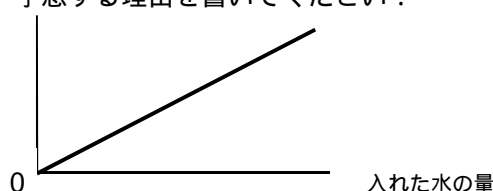
問3: Aさんの自動車は、ガソリン10リットルあたり150km走ります。Aさんの自動車について、次の問いに教えてください。

(3)ガソリンの量と走る道のりの関係を表すグラフを下に書いてください。

問4: 下の図のような形をしたボトルがあります。このボトルに水を入れていく場面を想像して下さい。水を入れるにつれて、溜まっていく水の高さが変わっていきます。「入れた水の量」と「ボトルに溜まった水の高さ」は、どのような関係になるでしょうか。Bさんは、この関係を、下のようなグラフに表しました。Bさんのグラフは、正しいと思いますか。正しいと思う場合は、その理由を書いて下さい。正しくないと思う場合は、あなたが予想するグラフをかき、そのように予想する理由を書いてください。



溜まった
水の高さ



これらの問題に対する正答率は、A校で通常の指導を行ったクラスの結果等と比べると、A、B校のどちらも高く、特にA校において高い結果となった。一方、A、B校における各問題に対する生徒の解答の内容を分類すると、両クラスの間での違いがみえた。B校では「対応」の見方が中心となっていたことを前述したが、質問項目に対する生徒の解答は、B校よりもA校の方が、望ましい解答の生徒の割合が増えている様子がみられた。

どちらのクラスでも GeoGebra でのアプレット教材を用いて、グラフを動的に見せたり、グラフと式、表が連動する様子を見せたりした。しかし、回数や時間の側面だけでなく、いつ、どのようなタイミングでグラフを見せるか、その際に、どのようなやりとりをするか等での違いが、生徒の学習に微細な違いをもたらした可能性がある。

なお、問4は、中学1年での学習内容を越えた変化を扱っているが、A、B校ともに、生徒は真剣に取り組んでいた。曲線よりも直線による見方が多いものの、曲がり具合に注目する生徒がいた。一方で、事前・事後調査ともに、「増えている = 比例」「増えている = 直線」といった生徒のミスコンセプションが見られた。変化についての見方を育てていくために、変化についてのバリエーションを関数の学習の中にどう取り入れていくか、更に検討をしていくことが大切である。

(4)について

成果の1つは、関数的思考の進展を評価する視点の構築である。また事後調査から、「対応」中心の指導の現状に対して、「変化」の推論を活発化させることの可能性が見出された。今後の課題として、教師との協働の側面の強化、関数の学習軌道の継続的な調査、関数のディスコースについての更なる検討、教師の指導実践を分析対象としていくこと等がある。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計10件)

日野圭子.(2019).「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：比例・反比例を実体を伴って語ることの実際」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』, 6, 3-12. 査読無.

日野圭子.(2019).「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：「対応」が中心の授業での生徒の学習の様相」『宇都宮大学教育学部研究紀要』, 69, 第2部, 325-338. 査読無.

日野圭子.(2018).「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：学習軌道からみた授業中の発話の考察(2)」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』, 5, 247-254. 査読無.

日野圭子.(2018).「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：学習軌道からみた授業中の発話の考察(1)」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』, 4, 129-136. 査読無.

日野圭子.(2017).「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：関数の学習軌道からの授業場面の考察」『宇都宮大学教育学部研究紀要』, 67, 第1部, 189-202. 査読無.

日野圭子.(2016).「比例の授業における数学的談話の構成：GeoGebraを通して教師が語ったこと」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』, 2, 145-154. 査読無.

日野圭子.(2015).「小中移行期の生徒の比例の概念発達を促す授業のデザインに向けて」『宇都宮大学教育学部紀要』, 65, 第1部, 81-96. 査読無.

< コモグニション論関係 >

日野圭子.(2019).「経験豊富な教師による算数科授業での相互作用：コモグニション論に基づく談話分析から得られる示唆」『日本数学教育学会数学教育学論究』, 112, 15-27. 査読有.

日野圭子.(2018).「数学的談話の進展におけるメタルールの役割：中学2年生のグループ活動のコモグニションからの考察」『日本数学教育学会第6回春期研究大会論文集』, 97-104. 査読無.

日野圭子.(2016).「関数の授業における数学的対象の構成」『日本数学教育学会第4回春期研究大会論文集』, 41-48. 査読無.

〔学会発表〕(計4件)

日野圭子.(2018).「学習軌道からみた関数の授業での談話の特徴」『日本科学教育学会年会論文集』, 42, 227-228.

日野圭子.(2017).「関数的思考の進展を促す談話の構成についての一考察：学習軌道の設定と生徒の観察」『日本科学教育学会年会論文集』, 41, 381-382.

日野圭子.(2015).「学習軌道に基づく関数的思考の進展を促す授業のデザイン」『第48回秋期研究大会発表集録』, 303-306.

< コモグニション論関係 >

日野圭子.(2018).「経験豊富な教師による算数科授業での相互作用：ナラティブの構成の過程から得られる示唆」『日本数学教育学会第51回秋期研究大会発表集録』, 105-112.