

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年6月15日現在

機関番号：14601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04433

研究課題名(和文) 算数・数学科の「証明の特性を踏まえた説明の能力」を育成する学習指導モデルの開発

研究課題名(英文) A study on the development of teaching and learning models for promoting students' ability to explain the correctness of their judgement based on the characteristics of mathematical proof

研究代表者

近藤 裕 (Kondo, Yutaka)

奈良教育大学・数学教育講座・教授

研究者番号：80551035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、算数・数学科における、子どもの「証明の特性を踏まえた説明の能力」に関する実態をとらえ、その能力を高めるための学習指導モデルを開発することを目的とする。

まず、3つの質問紙調査を実施し、子どもの説明の記述を数学の証明の特性の観点から分析することを通して、「事柄が正しい理由の説明」の評価の枠組みを設定した。そして、小学6年生の子どもの実態を事例的に明らかにした。さらに、子どもの説明の能力を育成するために有効な具体的な教材や学習指導について考察し、それに基づく5つの研究授業を実施した。

研究成果の概要(英文)： The purpose of this study are follow; to capture the actual situation about students' ability to explain the correctness of their judgment based on the characteristics of mathematical proof, and to develop teaching and learning models to promote their ability.

As the result of this study, through analysis and consideration of 3 questionnaire surveys, we proposed "the framework for evaluating the student's explanation from viewpoints which are related the characteristics of mathematical proof". And, the actual situation of students' ability was clarified quantitatively using this framework. Additionally, we researched about the teaching materials and the teaching plans which are effective for promoting students' ability, and carried out 5 lesson studies based on these.

研究分野：数学教育学

キーワード：算数 数学 説明 証明 能力

1. 研究開始当初の背景

「証明」は数学の根幹をなすものであり、その学習指導は中学2年から本格的に始められる。それ以前は「事柄が正しいわけを説明しなさい」といった形で、小学校から、学年に応じた「説明する活動」が日々の授業の中で行われている。しかし、「証明」の学習指導は教育課程に明確に位置付けられているのに対して、算数・数学の「説明」に関する学習指導については指導内容や方法及びそれらの系統が明確でなく、したがって、子どもたちのするがままに流されている現状がある。子どもたちに確かな言語能力を育成することが求められている今日において、数学の特性を踏まえた、「算数・数学科で育成すべき説明の能力」を明確にし、その能力を意図的・計画的に育成する学習指導を行うことが重要である。本研究では、特に、数学の「証明」の特性を踏まえて事柄が正しい理由を説明する能力に着目する。こうした数学のプロセスに関わる能力形成を図る学習指導の充実には、国際的な算数・数学教育において求められていることの一つでもある。また、中1ギャップの問題等を背景に、小学算数と中学数学の円滑な接続を図ることが急務とされている。小中接続の問題は、主に小学「算数」と中学「数学」との境に焦点を当てて考えられることが多いが、本研究では「説明」と「証明」との境に焦点を当て、その接続を考慮した学習指導について考える。

2. 研究の目的

本研究は、算数および中学校数学科における、子どもの「証明の特性を踏まえた説明の能力」に関する実態をとらえ、その能力を高めるための学習指導モデルを開発することを目的とする。その達成のため、以下の研究課題を設定する。

算数・数学科において「証明の特性を踏まえて事柄が正しいわけを説明できる能力」(以下、「説明の能力」と略記)を育成することの意義や重要性を確認し、その育成を考える上で参考となる先行研究を分析する。

算数・数学科における子どもの「説明の能力」の実態を事例的に明らかにし、算数・数学科における「説明の能力」の育成に関する現状と課題を把握する。

算数・数学科における子どもの説明の特徴や「説明の能力」の高まりをとらえるための枠組みを設定し、質問紙調査等を通じた検証により、その観点や枠組みの適切性を示す。

算数・数学科における子どもの「説明の能力」を高めるための学習指導モデルを開発し、授業実践等を通じた検証により、その妥当性と有効性を示す。

3. 研究の方法

研究課題ごとの主な研究方法は、以下の通

りである。

研究課題 については、国内外の文献等資料をもとに、全体会合において、研究者と小中高の学校教員の双方の立場から検討する。

研究課題 については、小中高の学校現場においてみられる子どもの説明の実際について、授業中に見られた口頭による説明、ノートやワークシートにおいてみられた記述による説明等に関する資料をもとに、子どもの説明の事例について全体会で共有し、検討する。また、子どもの「説明の能力」の実態を把握するための質問紙調査(予備調査及び本調査)を計画し、実施する。

研究課題 については、得た質問紙調査の結果を、全体会及び部会で分析・考察し、「説明の能力」の評価の枠組みを設定する。

研究課題 については、部会を中心とした授業研究を行う。

研究の過程及び結果は、随時、国内外の学会及び論文発表等を通して公にし、検討するとともに、講演会や研修会を通して教員志望学生や現職教員に対して、研究内容に関する啓蒙活動を行う。

4. 研究成果

期間中、全体会6回と作業部会8回の開催及び3つの質問紙調査と研究授業5回の実施を通して、以下のように研究を進めた。

研究課題 については、全体会合において、算数・数学科において「説明の能力」を育成することの意義や重要性について、「フィンランドの算数教育における説明」、「初等中等教育における教育課程の基準等の在り方に関する議論」、「算数・数学教育において育成すべき資質・能力」、「中等学校における論証指導」、「算数科における操作的証明」、「証明の機能」等に関する文献や資料をもとに、子どもと数学、社会とのつながりの側面から検討した。そして、「説明の能力」を育成することは、子どもがよりよく数学を理解する上で、また、子どもの生涯に必要な汎用的能力としての説明の能力を形成する上で重要であることを確認し、そのために、数学の本質や強みの観点から、育成すべき能力の質を検討する必要性を確認した。そして、それらを考える上で参考となる先行研究を具体的にあげ、分析した(例えば、國宗(2017)、宮川ら(2015)、宮崎(1995)、Mariotti, M.A.ら(1997)、de Villiers(1990)、ほか)。育成すべき「説明する能力」の質とその意義や重要性については、期間中、常に検討され見直された。

研究課題 については、全体会合において、子どもの説明の実態に関して、「100までの数表」(小1, 小2)、「繰り上がりのあるたし算の筆算」(小2)、「論じ合う学級集団」(小6)、「数学用語の正しい使用」(小6)、「垂直二等分線の作図」(中1)、「正負の数の計算」(中1)、「文字式の計算」(中1)、「文字式を用いた数の性質の説明」(中1, 中2)等に関する

学習指導の中でみられた子どもの説明の事例を共有し、子どもの説明の能力の実態について検討した。また、期間中、3つの質問紙調査を実施し、子どもの「説明の能力」の実態を事例的に把握した。まず、小学5,6年生を対象とした予備調査(立方体の見取図の問題)により、証明の学習以前にある子ども「説明の能力」の実態の概要を把握し、次に、本調査問題(三角形の面積の問題)を開発して小学6年生に対して実施した。最終年度末には、本調査を中学校全学年に対して実施した。

研究課題 については、全体会合及び部会において、子どもの説明の特徴を分析・考察した。

まず、予備調査から得られたデータを、数学の証明の特性の観点から質的に分析した。分析では、「A-a:根拠」、「B-b:推論」、「C-c:表し方」の観点を定め、「数学の証明の特性」を、「A:数や図形の公理や性質を根拠に用いる」、「B:演繹的推論を用いる」、「C:数学的な言語や記号を用いる」ことととらえ、「数学の証明ではない説明の特徴」を、「a:実測や図の見た目の特徴等、不確定な事柄も根拠に用いる」、「b:帰納的な推論や abductive な推論等の蓋然的な推論も用いる」、「c:図、操作、ジェスチャー、日常言語も用いる」こととしてとらえた。そして、「証明の特性を踏まえた説明」を上のA,B,Cの一部または全部を備えた説明と規定した(2015年)。

次に、説明に用いる「根拠」に焦点を絞り、さらに子どもの実態を詳しく把握して、「説明」に関する学習指導の具体的な目標設定を試みた。ここでは、「根拠に関する数学の証明の特性」の観点から、予備調査のデータを再分析し、子どもの説明の特徴について、「III:図形の定義や性質を根拠にして説明できる」、「II:図形の特徴を根拠にして説明できる(図形の不確定な特徴に依った説明:根拠に図形に関する断片的あるいは不確定な用語をあげているもの、根拠に図形の構成の仕方や操作の仕方をあげているもの)」、「I:自分なりに理由を示せる(直観に依った説明:根拠に図の見た目や実測の結果をあげているもの、記述に事柄の正しさの根拠にあたる内容が示されていないもの)」の特徴に分けられることを見だし、さらに、各個人の「問題の正答率(説明している問題に対する答えの判断の正しさ)」との関係进行分析することを通して、算数・数学における「説明する能力」の育成を志向した学習指導目標の水準として、上のIからIIIを設定することの妥当性を示した(2016年)。

これらの予備調査の分析・考察の結果をもとにして、子どもたちが行う「事柄が正しい理由の説明」を、より精緻に評価するための本調査問題を作成し、まず、小学6年生に対して実施した。分析では、C.ヘンペル(1965)が提唱する科学的説明の概念の一つである「演繹的・法則的説明

(Deductive-Nomological Explanation)」の概念を参考にして、それまでの分析の観点を振り返り、あらたに、子どもの説明を分析する観点として、「ア:説明の構成要素の客観性」と「イ:命題の結論を直接的に導く性質との結びつき」の2つを定め、子どもの説明の記述を質的に再分析した。その結果、アの観点については、説明の記述に「1)主観的な判断や前提されていない条件を含んでいる」ものと「2)前提された条件と数学の定義や性質のみで構成されている」ものが、また、イの観点については、説明の記述が「a)命題の結論を直接的に導く性質と結びついていない」ものと「b)命題の結論を直接的に導く性質と結びついている」ものがあることが明らかになり、これらの組み合わせである1-a,2-a,1-b,2-bと、無回答との合計5つのタイプに子どもの説明が分類できることを明らかにした。これを、「事柄が正しい理由の説明」の評価の枠組み」として用い、調査対象の小学6年生(2校分の合計56名、2016年の学年末に実施)の人数分布を調べ、1-a(43%),2-a(5%),1-b(9%),2-b(23%),無回答(20%)であることを事例的に明らかにした(2017年)。小学校卒業時の「説明する能力」の実態としてみると差が大きく、彼らが、その1年後に証明の学習を本格的に始めることを考えると、この差を証明の学習以前の段階で小さくすることが算数・数学教育の一つの課題であることを、あらためて浮き彫りにした。なお、中学校全学年に対する調査結果の分析・考察は、今後行う。

研究課題 については、部会を中心とする授業研究を通して、「説明の能力」を高めるための学習指導について検討した。期間中、次の5つの研究授業(学年、内容、子ども達に示したためあて)を実施し、検討した。

- ・小学6年:「円の面積:正しいことの理由の説明はどう書くとよいだろうか」(2015年)
- ・小学6年:「三角形の面積:「正しいことの説明」をするときは~するとよい!」(2016年)
- ・小学1年:「100までの数:なんで?がわかる説明に挑戦しよう」(2017年)
- ・小学6年:「三角形の面積:説得力のある説明とは?(A小学校にて)」(2017年)
- ・小学6年:「三角形の面積:説得力のある説明とは?(B小学校にて)」(2017年)

これら5つの研究授業については、授業者と研究代表を中心とする作業部会において、「事前テスト」、「説明する能力を育成するための問題」、「学習指導案:授業のねらい、問題の提示(目的・問題意識のもたせ方)の工夫、子どもの多様な考えの予想とその扱い、教師の発問や指示、学習形態(個人、グループ、一斉、反転学習形式等)、学習のまとめ」、「事後テスト:学習の評価」等について事前に検討し、当日の研究授業をメンバーで参観して、VTR等に記録した。そして、当日また

は後日に研究授業に関する協議会を行い、授業のVTR記録、子どもたちが取り組んだ授業中のワークシート、事前・事後テストの記述などのデータをもとにして、授業の分析・考察を行った。

研究授業では、子どもたちが説明する機会を設定し、子どもに自由に説明をさせ、互いの説明を見比べさせたり、どんな説明がよいと思うかを子ども達に検討させたりするなどの活動を取り入れた。提示された問題の正解は何かだけでなく、正解とする答えが正しいといえる理由の説明を対象にして、その特徴やよさを検討する活動は、「説明」に対して子どもに関心をもたせ、「よい説明」の特徴について考える機会を与える点で有効であることが感じられた。一方で、誰を相手に、何を目的として説明するのか、その相手意識をどう持たせればよいのかが、授業の計画と実施の上で困難であった。研究課題で設定した「A:説明の構成要素の客観性」と「イ:命題の結論を直接的に導く性質との結びつき」を満たす説明(タイプ2-bの説明)のよさを、子ども自身が感じられるように、また、説明が上記のAとイを満たすことの必要性を子ども自身が感じられるようにするには、それに迫らせる目的意識や相手意識をもたせることが必要となる。今回実施した研究授業においては、子ども達の意識をそこに十分に迫らせるには至らなかった。この点は、今後、本研究が解決しなければならない重要な課題の一つである。

今のところ、「説明の能力」の育成において教師ができることとして、少なくとも次の3つが重要であると考えられる。

第一は、説明する機会を設けることである。子どもの「説明の能力」は、子ども自身が「説明すること」によって身につくものである。子どもの「説明する能力」を育成するには、子ども自身が、その力を繰り返し使う(はじめは使おうとする)ことによって徐々に身につけ伸ばすようにするしかない。その力を発揮させる機会を、教師が意図的に設けることがまずは必要である。期間中の取り組みは、この点を十分に意識して行った。

第二は、説明したくなる環境をつくることである。佐伯胖(1983)は、「先生の問題を、先生のために、先生の教えた方法によって」解くことを強いられた生徒と教師との関係の存在を指摘しているが、それを乗り越え、子どもに、「証明の特性を踏まえた説明」をする必要性に迫らせる目的意識や相手意識をもたせる環境をつくらなければならない。Tall(1986)の指摘する「納得できる議論」の3つのステージ、すなわち、自分自身の納得、友達の納得、敵の納得の視点等を参考にして、期間中の取り組みをさらに検討し、改善させていきたい。

第三は、「よい説明」に触れさせることである。それによって、問題に対して誤った判断をした子どもは、自分の判断が誤りである

ことを自ら認めることを期待する。また、判断は正しいが説明が不十分である子どもが、誰もに事柄の正しさを認めさせる「よい説明」がもつ特徴をつかむことを期待する。そのためには、教師が、子どもが様々に行う説明を適切に評価し「よい説明」を選択しなければならない。しかしながら、その評価の枠組みはそれほど明確ではない。本研究の研究課題で得た「事柄が正しい理由の説明」の評価の枠組みは、その一例を提案するものである。

本研究の主要な成果は、期間中、国内学会で3回、国際学会で3回の発表を行い公にした。また、算数・数学教育研究全国大会講習会及び中学校部会講演ほか、県及び地区における講習会や小中学校の校内研修会等、多数の機会において、本研究の内容に関する啓蒙活動を行った。

<引用文献>

- 國宗進(2017)．数学教育における論証の理解とその学習指導．東洋館．
- 宮川健ほか(2015)．中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的基盤．全国数学教育学会誌，21(1)，pp.63-73．
- 宮崎樹夫(1995)．学校数学における証明に関する研究．筑波大学博士(教育学)学位論文．
- Mariotti, M, A. Bartolini, B, M. Boero, P. Franca, F, F. Rossella, G, M. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.1, pp.180-195.
- Michael de Villiers. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. Pythagoras, 24, pp.17-24.
- C, Hempel. (1965). Aspects of Science Explanation, New York, Free Press, 長坂源一郎訳(1973)．科学的説明の諸問題．岩波書店．
- 佐伯胖(1983)『「わかる」ということの意味』，岩波書店，p.121.
- Tall, D. (1986). THE NATURE OF MATHEMATICAL PROOF. Mathematics Teaching, pp.127, 28-32.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計5件)

近藤裕(2017)「事柄が正しい理由の説明」の評価の枠組み」．『第50回秋期研究大会発表収録』，pp.407-410.

Fujita T, Kondo Y, Kumamura H, Kunimune S (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. Journal of Mathematical Behavior, 46, pp.96-111.

近藤裕(2016)「算数科における説明の能力

形成を志向した学習指導目標の水準 - 『事柄の正しさを根拠をもとに説明する能力』に焦点をあてて - 』、『第 49 回秋期研究(弘前)大会発表集録』, pp.397-400.

Yutaka Kondo. (2015). CHARACTERISTICS OF STUDENT'S 3D GEOMETRICAL REASONING IN ELEMENTARY SCHOOL: FOCUS ON THE STUDENT'S EXPLANATIONS. Proceedings of 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, pp.731-736 .
近藤裕(2015)「算数科における『証明の特性を踏まえた説明』の能力の育成に関する基礎的考察」, 『第 48 回秋期研究(長野)大会発表集録』, pp.399-402 .

〔学会発表〕(計 7 件)

近藤裕, 「事柄が正しい理由の説明」の評価の枠組み」. 第 50 回秋期研究大会, 2017.

Yutaka Kondo. CHARACTERISTICS OF STUDENTS' EXPLANATIONS IN ELEMENTARY SCHOOL: WHICH TRIANGLE IS LARGER?. The 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2017 .

近藤裕, 「算数科における説明の能力形成を志向した学習指導目標の水準 - 『事柄の正しさを根拠をもとに説明する能力』に焦点をあてて - 』, 第 49 回秋期研究(弘前)大会, 2016 .

Yutaka Kondo. CHARACTERISTICS OF STUDENT'S 3D GEOMETRICAL REASONING IN ELEMENTARY SCHOOL: FOCUS ON RELATIONSHIPS BETWEEN STUDENTS' EXPLANATIONS AND STUDENTS' ANSWERS. The 13th International Congress on Mathematical Education. 2016.

近藤裕, 「算数科における『証明の特性を踏まえた説明』の能力の育成に関する基礎的考察」, 第 48 回秋期研究(長野)大会, 2015 .

大宅香織, 近藤裕. 「子どもが見いだし説明する過程を重視した算数の授業 - 『説明の能力』の高まりを意識した学習指導: 小学 1 年生の『説明』の特徴と指導 - 』, 第 98 回全国算数・数学教育研究(岐阜)大会, 2016.

Yutaka Kondo. CHARACTERISTICS OF STUDENT'S 3D GEOMETRICAL REASONING IN ELEMENTARY SCHOOL: FOCUS ON THE STUDENT'S EXPLANATIONS. Proceedings of 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 2015 .

〔その他〕

近藤裕, 「算数・数学教育における『説明する力』の育成」, 第 99 回全国算数・数学教育研究(和歌山)大会中学校部会講演, 2017.

近藤裕(2016)「子どもが見いだし説明する過程を重視した数学の授業」, 『第 98 回全

国算数・数学教育研究(岐阜)大会講習会テキスト』, pp.59-64.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

近藤 裕 (KONDO YUTAKA)

奈良教育大学・数学教育講座・教授

研究者番号: 80551035

(2) 研究分担者

熊倉 啓之 (KUMAKURA HIROYUKI)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号: 00377706

花木 良 (HANAKI RYO)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号: 70549162

(2015~2016年)

舟橋 友香 (FUNAHASHI YUKA)

奈良教育大学・数学教育講座・准教授

研究者番号: 30707469

(3) 研究協力者

藤田 太郎 (FUJITA TARO)

エクスター大学・教育学研究科・上級講師

下村 岳人 (SHIMOKURA TAKETO)

島根大学・教育学部・講師

吉井 貴寿 (YOSHII TAKATOSHI)

京都市立堀川高等学校・教諭

真鍋 佑香 (MANABE YUKA)

京都府私立平安中学校高等学校・教諭

堤 彦三郎 (TUTUMI HIKOSABURO)

奈良県私立天理中学校・教諭

原田 辰哉 (HARADA TATUYA)

奈良県宇陀市立榛原中学校・教諭

大宅 香織 (OOTAKU KAORI)

奈良教育大学附属小学校・教諭

河内 康展 (KOUCHI YASUNORI)

奈良市立都跡小学校・教諭

松浦 ほのか (MATUURA HONOKA)

奈良県葛城市立新庄小学校・教諭

松井 大樹 (MATSUI TAIKI)

大阪府茨木市立春日小学校・教諭

下村 勝平 (SHIMOMURA SHOHEI)

奈良県斑鳩町立斑鳩西小学校・教諭