様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 19 日現在

機関番号：５６１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４７６７
研究課題名（和文）事象再現型モンテカルロ計算の効率化とその防災問題への応用に関する基礎的研究

研究課題名（英文）Basic study on efficiency of the phenomenon reproduction type of Monte Carlo calculation and its application to the problems of disaster prevention

研究代表者
松保　重之（MATSUHO, Shigeyuki）

阿南工業高等専門学校・創造技術工学科・教授

研究者番号：９０１５７３４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：効率的なモンテカルロ（MC）法の実現によって、今まで解けなかった問題が解けたり、誤差の大きい計算によって誤った判断を下すことを防ぐことを最終目的としている。MC法とは、乱数を用いる技法の総称なので、計算に用いる擬似乱数を高精度化することで、効率化計算を目指した。具体的には、一様乱数を用いたMC計算を行う場合、MC計算を実施する前に、精確に一様分布に従う擬似乱数列を調べ、その乱数シードを対象問題ごとにデータベース化しておく。実際のMC計算時に、最適乱数シードを用いることで、高精度計算を実現し、ひいては高精度に裏付けされた効率化計算を実現した。開発手法の有効性は、種々の例題を通じて、例証した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
モンテカルロ・シミュレーションは人命に関わる問題・膨大な予算や財産に関わる問題・問題解決に長期間を必要とする問題などの難解問題を扱う手法として極めて有力な最終手段である。本研究は、高精度計算の実現を可能とすることによって、実用的時間内に実用的な精度で解決策を得ることができるモンテカルロ・シミュレーションの開発に関する研究である。

研究成果の概要（英文）：This study developed precise pseudo-random numbers (p.r.n.) to perform efficient Monte Carlo (MC) simulation. The MC simulation is the powerful last means to solve a difficult problem. However, the necessary solution may not be provided if its calculation is inefficient. In addition, the computational result of the bad precision may lead a wrong engineering judgment. So, efficient computation is important. The efficient MC simulation is feasible by using good p.r.n. of the precision. In the proposed method, an error between the frequency distribution of the generated p.r.n. and its required probabilistic distribution is considered. The errors of many series of p.r.n. are observed and the p.r.n. seed minimizing the error is compiled into a database. In the MC calculation, a p.r.n. series of the seed registered with the database is used. This study formulated the error based on probabilistic moments. The effectiveness of the developed technique was illustrated by numerical examples.

研究分野：土木工学、構造工学、構造信頼性工学

キーワード：モンテカルロ法　シミュレーション　擬似乱数　効率化計算

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

モンテカルロ（ＭＣ）法は、応用範囲が広い有力な問題解決手段であり、領域積分型ＭＣ法と事象積分型ＭＣに大別することが出来る。一般に、ＭＣ法によって求めようとする解は、繰り返し回数とともに収束していくが、実用的な時間内に実用的な精度の解を求めるために、計算の効率化が不可欠となっている。事象再現型ＭＣ法は領域積分型ＭＣ法より若干ながら効率が悪く、また、効率化の手法は領域積分型ＭＣ法に基づく研究が多い [1)]のが現状である。ところが、実際の問題では、領域積分型ＭＣ法によって問題解決が図られる場合は限定されることが多い。例えば、地震やゲリラ豪雨や火山噴火などによる被害は、環境問題とともに甚大化の傾向にあるが、容易に実験・観測が出来ないので、その対策のためには、シミュレーションが必要不可欠である。その際の外力や材料強度などの関係は、定式化が容易でない場合が多く、そのような場合には領域積分型ＭＣ法では対応困難となる。それ故、事象再現型ＭＣ法が不可欠となるが、その効率化計算についての研究 [2)]は、ほとんど無いと言っても過言ではない。

そこで、本研究では、事象再現型ＭＣ法による計算の効率化手法を開発することにした。

２．研究の目的

シミュレーションを行う際、ほとんどのパラメータは、その程度の差はあってもバラツキを有し、その再現には乱数が用いられる。研究代表者は、科学研究費の採択前に、ＭＣシミュレーションでは、効率化計算の実現のためには、稀な現象を精確に再現できるようにすることが重要である [3)]ことを明らかにしてきた。稀な現象を精確に再現する方法は、色々考えられるが、ＭＣ法は乱数を使う技法の総称なので、その基礎である擬似乱数の精度を向上させることが、一番基礎的で、ＭＣ法のメリットである広範囲に安定的に利用できる方法であると考えられる。

そこで、実際にＭＣ計算を行う前に、高精度な擬似乱数列を生成している乱数シードを調べてデータベース化しておき、実際にＭＣ計算する際には、そのデータベースの中から最適な乱数列を使う方法（シード選別法）を考える。どの乱数シードを用いても、理論的には、繰り返し回数を無限に増やすことによって、正解値に収束していくわけであるが、限定された時間内に正解値により早く収束する乱数列の初期値をデータベース化する訳である。ただし、膨大な乱数列の中から、どの乱数列を使えば、効率的な計算を実現できるかを示す尺度を探すのが、本研究の目的である。

３．研究の方法

シード選別法では、ＭＣ計算の計算結果が、なるべく誤差の少ない結果となる乱数列を選別するわけだが、その際に用いる尺度を試行錯誤的に決める。例えば、一様乱数であれば、ＭＣ法に用いる乱数の標本集団が、どれだけ一様分布に近い乱数列となっているかを客観的に示す尺度を決める。本研究では、シード選別の尺度として、確率モーメント（積率）を考えた。これは、確率分布に関する全情報は、全ての次数の積率と等価であるからである。ただし、Ｎ次元問題を対象とし、例えば一様乱数の場合、Ｎ次元空間内で、生成乱数が如何に偏りなく、万遍にばらついているかが重要となるので、このようなことも視野に入れて、シード選別に用いる尺度を試行錯誤的に決めて行った。そして、この結果を、ＭＣ積分の問題や土木構造物の信頼性評価の問題などに適用し、開発手法の有効性を例証した。

４．研究成果

高次の積率までを含めた尺度を提案し、その結果を、代表的な幾つかのＭＣ積分の問題に適用した。その結果、被積分関数の形状に関わりなく、また、次数に関係なく、通常のＭＣ法による計算結果よりも良い結果となることを確認できた。その他、種々の問題に適用し、開発手法の有効性を例証した。その中には、研究代表者が専門とする土木構造物の信頼性評価の問題も含まれ、良好な計算結果が得られることを確認できた。ここでは、基本的な問題として、２次元正規確率分布の上側超過確率の計算（式(1)参照）を例に、説明する。

$$P = \int_{3.0}^{\infty}\int_{2.0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2\left(1-r^2\right)}\right\} dx_2 dx_1 \tag{1}$$

上式(1)の正解値は P ＝0.0006540 である [4)]。

ＭＣ計算では，擬似乱数の精度のみの影響を調べるために，分散逓減法 [1)]等を援用しない入門的（Crude）ＭＣ法 [1)]を用いる．入門的ＭＣ法では，

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

と言う定積分は，N 個の一様擬似乱数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ を用いて，次式で近似評価される：

$$\hat{I} \cong \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \tag{3}$$

シード選別法を用いない擬似乱数を用いた式(3)によって式(1)を評価した結果を Table １に示

す。表中、ρは推定に伴うバラツキに伴う変動係数である。試行回数を増やすことによって、推定精度が向上し、推定値が一定値に収束する様子が分かる。ただし、収束値が正解値より若干小さめとなり、稀な事象を取り逃している可能性があることが分かる。

Table 1 Results of Eq.(1) which were estimated based on MC method using default seed of random numbers

No.	Try Num.	Estimation	Error %	ρ
1	1000	0.0007399	13.1272	1.1627
2	10000	0.0006709	2.5883	0.3860
3	100000	0.0006527	0.2038	0.1237
4	1000000	0.0006519	0.3177	0.0392

　つぎに、多次元確率分布への分布状況の良否を判定する評価指標S_jとして，まず，シードjの乱数の平均値と共分散行列の値が，それらの理論値となっているか否かを式(4)で判定することを考えた．式(4)中で，使っているパラメータは，式(5)～(6)

$$S_j = \sum_{l=1}^{n}\left(\hat{a}_{l,j} - a_l\right)^2 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\hat{c}_{lm,j} - c_{lm}\right)^2 \tag{4}$$

$$\hat{a}_{l,j} = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{I=0}^{N-1}\xi_{nI+l,j}\right), \quad a_l = 0.5 \tag{5}$$

$$\hat{c}_{lm,j} = \frac{1}{N-1}\sum_{I=0}^{N-1}\sum_{J=0}^{N-1}\left(\xi_{nI+l,j} - \hat{a}_{l,j}\right)\left(\xi_{nJ+m,j} - \hat{a}_{m,j}\right) \tag{6a}$$

$$c_{lm} = \frac{1}{12} \quad (if\ \ l = m), \quad c_{lm} = 0 \quad (if\ \ else) \tag{6b}$$

で与えられる。最後に、区間[0，1]で一様分布する確率変数Xの原点回りのn次原点積率（理論値）は，一般に，

$$E[X^n] = \frac{1}{n+1} \tag{7}$$

のように簡単に与えられる．そこで，当該MC計算に必要な数のN個の擬似乱数から構成される擬似乱数列をM系列（たとえば1000系列）発生させ，L次までの積率適合を考える．この時，j番目の擬似乱数系列中のi番目の擬似乱数X_{ij}　（i＝1,…,N;　j＝1,…,M）に対して、k次の標本原点積率は、

$$\hat{E}[(X_j)^k] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_{ij})^k \tag{8}$$

で計算でき、j番目の擬似乱数系列についての原点積率の２乗誤差は、

$$S_j = \sum_{k=1}^{L}\left(\hat{E}[(X_j)^k] - \frac{1}{k+1}\right)^2 \tag{9}$$

で与えられる。それ故、上記の２乗誤差S_jが最小となる擬似乱数列を一番良好な擬似乱数列とし、その擬似乱数列を実際のMC計算に用いた。なお、$\hat{\bullet}$は、●の推定値であることを示す記号である。

式(4)～(6)の方法でシード選別した擬似乱数を用いた式(3)により式(1)を推定した結果をTable 2 に示す。また、同様に、式(7)～(9)の方法を２次元空間に拡張したシード選別法を用いた場合の式(1)の推定結果を Table 3 に示す。

Table 2 Results of Eq.(1) estimated based on MC method using seed selected by Eq.(4)

No.	Try Num.	Estimation	Error %	ρ
1	1000	0.0005895	9.8670	1.3027
2	10000	0.0006413	1.9445	0.3948
3	100000	0.0006588	0.7342	0.1232
4	1000000	0.0006538	0.0374	0.0391
5	10000000	0.0006538	0.0343	0.0124

Table 3 Results of Eq.(1) estimated based on MC method using seed selected by Eq.(9)

No.	Try Num.	Estimation	Error %	ρ
1	1000	0.0006880	5.2064	1.2058
2	10000	0.0006477	0.9578	0.3928
3	100000	0.0006531	0.1328	0.1237
4	1000000	0.0006550	0.1486	0.0391
5	10000000	0.0006542	0.0358	0.0124

Table 2 は２次までの積率でシード選別を行った結果であるが､Table 1 と比較することにより、良い結果が得られているのが分かる。ただし、計算による推定値は、正解値より若干小さめで、Table 1 ほどでもないが、稀な事象を精確に再現できてない可能性が若干ある。Table 3 は誤差も小さく、しかも、推定値も正解値より若干大きめとなり、稀な現象を精確に再現できているものと推定される。これらは、MC積分による検証であるが、事象再現型MC法による検証でも良い結果となることを確認している。

＜引用文献＞
① 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション（改訂版），pp.7-63, 培風館, 1977 年 11 月.
② 松保重之：モンテカルロ法の積率調整法に基づく効率化に関する考察，第 23 回材料・構造信頼性シンポジウム講演論文集，pp.67-71，2008 年 12 月.
③ 松保重之：構造信頼性評価のための事象再現型モンテカルロ法の効率化, 材料, Vol.54, No.3, pp.314-319，2005 年 3 月.
④ 山内二郎編：統計数値表 JSA-1972，日本規格協会，pp.124-125，1972 年.

５．主な発表論文等

〔学会発表〕（計　５件）

① 松保重之：モンテカルロ法に基づくプレートガーダー橋の信頼性評価法に関する検討，平成 31 年度土木学会四国支部第 25 回技術研究発表会講演概要集, 社団法人　土木学会四国支部, No.089，2019-6.

② 松保重之：モンテカルロ法に基づく桁橋の信頼性評価，第 31 回信頼性シンポジウム講演論文集，pp.109-113，2018-12.

③ 松保重之・柴原一帆：モンテカルロ法に基づくプレートガーダー橋の信頼性評価，平成 30

年度土木学会四国支部第 24 回技術研究発表会講演概要集，社団法人　土木学会四国支部，No.163，2018-5.

④ 柴原一帆・松保重之：モンテカルロ法によるプレートガーダー橋の信頼性評価について，第 30 回記念信頼性シンポジウム講演論文集，pp.129-132，2017-12.

⑤ 松保重之：擬似乱数の確率特性値の改善がモンテカルロ計算に与える影響について，第 30 回記念信頼性シンポジウム講演論文集，pp.28-32，2017-12.

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：西村　伸一
ローマ字氏名：Shinichi NISHIMURA
所属研究機関名：岡山大学
部局名：大学院環境生命科学研究科
職名：教授
研究者番号（8 桁）：30198501

(2)研究協力者
研究協力者氏名：平山　基
ローマ字氏名：Motoi HIRAYAMA