

平成 30 年 9 月 4 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04769

研究課題名(和文)モチヴィックコホモロジーおよび周期とレギュレーターの数論的研究

研究課題名(英文)Arithmetic study of motivic cohomology, periods and regulators

研究代表者

朝倉 政典 (Asakura, Masanori)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：60322286

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題においては、代数多様体の周期積分とレギュレーターの研究を数論的観点から行った。一連の研究において、超幾何関数は主要な役割を果たしている。研究成果は、大きくわけて3種類に分類される。ひとつは、代数多様体の周期積分に関するグロス・ドリーニュ予想の研究であり、パリ大学のフレサン氏との共同研究である。ふたつ目は、超幾何ファイブレーションのレギュレーターに関するものであり、これは千葉大学の大坪紀之氏との共同研究である。最後に、 p 進レギュレーターに関する研究成果をあげた。これは広島大学の宮谷和堯氏との共同研究である。いずれの研究成果も論文にしており、将来的に出版する予定である。

研究成果の概要(英文)：The thema of this research is periods and regulators of algebraic varieties, and I studied them from the viewpoiunt of arithmetic. In particular, the hypergeometric functions play an important role. There are 3 knods of the results which I obtained from 2015--2017. One is about the periods of algebraic varieties, in particular we studied the Gross-Deligne conjecture. This is the joint work with Fresan at the university of Paris. The second is about the Beilinson regulators on $K1$ of hypergeometric fibrations introduced by Otsubo and myself. This is the joint work with Noroyuki Otsubo at Chiba university. The third is about p -adic regulators for syntomic cohomology groups. This is the joint work with Kazuaki Miyatani at Hiroshima university. All the works are written up in preprints. Some of them are already published, and we are preparing for publishing the rest.

研究分野：数論幾何学

キーワード：レギュレーター 周期積分 超幾何関数

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、これまで 10 年以上にわたって周期とレギュレーターの研究を続けている。

これらは整数論的に重要で興味深い研究対象であり、また、いくら研究しても研究し尽くせないほど深い。一方で、レギュレーターは、しばしば notoriously difficult と評されるほど、難解な対象である。この難解なものを如何に攻略すべきか、と考えたとき、キーワードになるのは特殊関数であると考えた。実際、Beilinson 予想が世に出て以来、これまでの研究では保型形式という特殊関数が重要な役割を果たし、多くの成果を挙げてきた。今後も保型形式が最重要キーワードであり続けることに変わりはないだろう。

Beilinson 自身は、楕円曲線の K_2 群の場合にこの予想の部分的証明を与えた。その後も多くの研究者たちがこの問題に取り組み、数多くの成果を挙げてきたが、一般解決には程遠く、目処も立っていない。また、近年になってこの方向での議論が煮詰まってきている感がある。つまり、このパターンで新しい結果を生み出すことが少しずつ困難になってきている。そこで、保型形式ではない別の特殊関数を使って攻略できないだろうか考えたとき、思い至ったのが超幾何関数である。実際、これは周期の計算では大活躍しており、また保型形式に比べて、より広範なクラスの多様体に対して適用可能な点、汎用性が非常に高い。そこで、超幾何関数をキーワードにして周期とレギュレーターを攻略し、数論的応用を目指そうと思い至るようになった。

超幾何関数を使った周期の計算は非常に一般的であるが、一方で Gross-Deligne 予想への応用など、整数論的な研究はそれほど多くはなかった。また超幾何関数によるレギュレーター研究は、さらに少なく、散発的な結果がいくつかあるのみであった。初めて組織的に研究したのは、研究分担者である大坪紀之氏(千葉大)である。彼は、フェルマー曲線の K_2 レギュレーターやそのヤコビ多様体のアーベル・ヤコビ写像について一般超幾何関数を用いて記述することを行った。その後、研究代表者と共同で、超幾何ファイブレーションを導入し、さらに多くの成果をあげた。

我々のこのような研究は、まだ始まったばかりであり、世界でもまだ少数派である。しかし、発展の余地が大いにある、有望な研究であると考えており、従って、競争相手がそれほど多くない今の時期に、精力的に研究を行えば、多くの成果が期待できると考える。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代数多様体の周期およびレ

ギュレーターの数論的な研究である。より具体的に次の 3 つの課題を中心に研究していくことを目的としている。

(1)代数多様体の周期の研究、特に CM 周期とガンマ関数についての Gross-Deligne 予想の研究。ここで CM とは虚数乗法のことである。これは CM アーベル多様体の周期に関する志村五郎の深い研究をモチーフへ一般化する形で Gross と Deligne によって定式化された。未解決の難問であり、今のところ一般解決のめどは立っていない。解決を困難にしている理由は、そもそも周期積分を計算するのが容易でない上、さらにそれと L 関数やガンマ関数と結びつけるのは、けして自明ではない点である。きちんと戦略をもって取り組まなければ成果をあげることは難しい。

(2)レギュレーターと L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想の研究。モチーフの L 関数の特殊値の中でも、非臨界値とよばれるものは特に難しいと考えられている。Beilinson 予想とは、この非臨界値が高次代数 K 群のレギュレーターに一致すると予想した。難問であり、いまだ一般解決の見通しはない。

(3) p 進周期および p 進レギュレーターの研究。上記 Beilinson 予想の p 進体上の類似である。Beilinson のレギュレーターをサントミックレギュレーターに取り換えることで類似の問題が定式化できる。この問題もいまだ一般解決の見通しはない。

上記の研究では、超幾何関数を主な道具として用いている。ゆえに、特殊関数論との融合領域研究として推進することも可能であり、実際、本研究課題では、特殊関数論への応用も目的のひとつとして、研究を行っている。

これらは独立なテーマではなく、密接に関わりあっている部分が多い。従って、ひとつひとつを個別に研究するのではなく並行して行うのが適切かつ効率的である。こうして、異分野交流を通して、新しいブレイクスルーを起こすことを目的とする。

3. 研究の方法

本研究課題における方法の特色は、超幾何関数を主な道具として用いる点である。超幾何関数の歴史は古く、数学の様々な研究分野と接点が存在するが、一方で、例えばレギュレーターとの関係については、これまであまり研究されてこなかった。その接点を深く追求すること、すなわち異分野融合を意識して、研究を推進しているのが特色である。これによって周期やレギュレーターの研究における新しいブレイクスルーを産み出すことを目指している。

また数論幾何学において代数幾何学のさまざまな理論の p 進類似を追求することが一般的なスタイルになっている。基礎体を複素数から p 進体に取り替え、コホモロジーを p 進エタールコホモロジー、クリスタリンコホモロジー、サントミックコホモロジーに取り替えて、類似の問題の定式化および研究していく、というパターンが多い。 p 進周期および p 進レギュレーターも、そのような枠組みで定式化される(ただし研究者によって流儀が異なることがある)。このような研究は、整数論への応用を念頭に行われたものであったが、近年では、 p 進化そのものが独立な価値をもって受け入れられるようになった。それは、単なる複素幾何の類似に留まらない、本質的に新しい数学が、 p 進化の研究から生み出されることが大きな理由と思われる。本研究課題においては、Beilinson 予想の p 進類似をアイソクリスタルの理論(p 進微分方程式)を用いて攻略した。

本研究は、数論幾何学の難しいテーマを扱っているため、すべてを独りでやりきることは非常に困難な上、それが望ましいというわけでもない。お互いの強みとする知識やテクニックを出し合って、補完し合いながら共同研究することができれば、研究遂行における大きな推進力となりうる。本研究代表者は、大坪紀之氏(千葉大学)、寺杉友秀氏(東京大学)や宮谷和亮氏(広島大学)らと共同研究を行った。

4. 研究成果

(1) 研究代表者は、連携研究者である大坪紀之氏(千葉大学)との共同研究において、超幾何ファイブレーションという多様体を定義し、そのモチフィックコホモロジーのレギュレーターの研究を行い、多くの成果を挙げた。その応用は、超幾何関数の研究にまで及び、一般超幾何関数 $3F_2$ の対数公式を得ることができた。より詳しく、超幾何関数のあるパラメーターがある初等数論的な数値条件を満たせば、 $x=1$ での値が代数的数の対数でかけることを証明した。また、さらに別の数値的条件を満たせば、関数そのものが代数関数の対数で書けることを示した。これは、上記レギュレーターの研究を通して発見された新しい公式であり、我々の研究テーマが実り多い成果をもたらすことを証明している。実際、超幾何関数の歴史は 100 年以上あり、膨大な研究成果が存在するが、今回、我々が新しい公式を発見できた主たる理由は、レギュレーターという数論幾何の理論に着目した点であるといえよう。このような新しい視点での研究はまだ始まったばかりであり、今後も実り多い成果を期待できる。この研究成果は、3 本のプレプリントにまとめあげ、アーカイブに公開中である。また、すでに投稿済みで

あり、現在、査読されている最中である。

(2) 上記の大坪紀之氏との共同研究以外に、さらに研究代表者は K_2 レギュレーターの研究を行った。上記(1)の研究では、 K_1 のレギュレーターを通しての研究成果であるが、それとは別に K_2 のレギュレーターを研究した。主結果は、超幾何関数を使った K_2 のレギュレーターの新しい公式を与え、さらに楕円曲線の場合に、 L 関数の特殊値との比較を、計算ソフト(MAGMA)を用いて行った。証明のポイントは、超幾何ファイブレーションを考えることで、レギュレーターの微分方程式が得られることである。その微分方程式の解が一般超幾何関数で与えられることを示すことによって証明した。この成果をまとめた論文は、すでに専門誌に受理されており、出版印刷中である。またアーカイブでも公開中である。

(3) 宮谷和亮氏(広島大)と p 進レギュレーターの研究を共同で行い、成果を挙げた。これは上記(2)の研究(基礎体は複素数体)の p 進類似である。より詳しく、 p 進体上定義された超幾何ファイブレーションを用いて、その K_2 のレギュレーターをアイソクリスタルの理論を援用することで、具体表示を与えた。その証明には、超幾何関数の理論、サントミックコホモロジーの理論、レギュレーターの理論を用いており、また、アーベル多様体の退化に関する結果も用いている。数論幾何学の多くの理論に支えられて完成されているといつてよいものである。

p 進の K_2 レギュレーターは、Coleman-de Shalit 以降、ほとんど進展がない状況だったが、我々の研究成果によって、ブレイクスルーが起こる可能性があると考えている。プレプリントとしてアーカイブに公開中であり、近いうちに投稿する予定である。

(1),(2),(3)の研究成果において、共通しているキーワードが超幾何ファイブレーションである。これは研究代表者と連携研究者である大坪紀之氏(千葉大学)が導入したある代数多様体のクラスである。この超幾何ファイブレーションのレギュレーターに関して、これほど多くの研究成果をあげることができたことは、実をいうと、我々の期待以上の事実であった。今後も継続して、この方向で研究を推進させていく予定である。

上記の研究成果については、すでに論文として書き上げ、出版受理または投稿中であるが、一方で、これらの結果を書き上げたあとに、さらなる重要な進展がいくつかあった。より詳しく、 p 進レギュレーターに関して、その p 進展開の公式が得られた。また、 p 進 L 関数との関係、ポリガンマ関数の p 進化、それに伴う新しい問題など、研究がどんどん興味

深い方向へ向かっている。このような方向で研究をさらに深く追求していけば、 p 進 L 関数の特殊値に関する Perrin-Riou の予想や Bloch-Kato の玉河数予想への応用も可能ではないかと期待している。この研究は、現在も活発に継続中であり、ある程度まとまってきたら、さらに続編として、論文を書くことを予定している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

2015年以降のみ(出版予定のものを含む)。

1 M.Asakura, N.Otsubo, CM periods, CM regulators and Hypergeometric functions II, To appear in Math.Z. 2018年出版印刷中, 査読有り.

2 M.Asakura, Regulators of K_2 of Hypergeometric Fibrations. To appear in Researches in Number theory. 25 pages. 2018年出版印刷中, 査読有り.

3 M.Asakura, N.Otsubo, CM periods, CM regulators and Hypergeometric functions I, Canad.J.Math. 70 (2018), 481-514. 査読有り.

4 M.Asakura, A simple construction of regulator indecomposable higher Chow cycles in elliptic surfaces. Recent advances in Hodge theory, 231--240, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 427, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016. 査読有り.

[学会発表](計 4 件)

主な国際研究集会での招待講演発表. すべて研究代表者による英語による講演発表.

1 M.Asakura : F-isocrystal and p -adic regulators via hypergeometric functions. 研究集会 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017 2017年5月29日-30日, 函館市

2 M.Asakura : p -adic regulator via the hypergeometric functions. 研究集会 代数・解析・幾何学セミナー 2017年2月13日--16日, 鹿児島大学

3 M.Asakura :Regulagtors on hypergeometric fibrations. 国際研究集会

Motives and Complex Multiplication 2016年8月14日-19日, アスコナ, スイス.

4 M.Asakura :Regulagtors on hypergeometric fibrations. 国際研究集会 Arithmetic L-functions and differential Geometric Methds (Regulators IV) 2016年5月23日-28日, パリ大学, フランス.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
朝倉 政典 (ASAKURA, Masanori)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 60322286

(2)研究分担者

(3)連携研究者
大坪 紀之 (OTSUBO, Noriyuki)
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 60332566

(4)研究協力者

()