

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04773

研究課題名(和文) ヴェイユ相互律に基づくモチーフ理論と代数的サイクル

研究課題名(英文) Motive theory and algebraic cycles based on Weil reciprocity

研究代表者

山崎 隆雄 (Yamazaki, Takao)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：00312794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,500,000円

研究成果の概要(和文)：ホモトピー不変とは限らない現象を扱えるような「モジュラス付き」モチーフの三角圏を構成した。これはVoevodskyの構成したモチーフの三角圏の拡張である。この圏はわれわれが過去に導入した相互層の理論と密接な関係にある。また、このHodge理論における対応物である「モジュラス付き」混合Hodge理論の研究も行った。特に、モジュラス付き曲線から構成されるNoriモチーフがLaumon 1-モチーフの圏と同値になることを証明した。これはモジュラスのない場合はDeligne 1-モチーフと同値になるというAyoubとBarbieri-Vialeの結果の拡張である。

研究成果の概要(英文)：A triangulated category of motives with modulus is constructed in such a way that it enables us to handle non-homotopy invariant phenomena. This is a generalization of Voevodsky's triangulated category of motives. Our category has intimate relationship with reciprocity sheaves that was introduced in our previous work. We also studied the mixed Hodge structures with modulus, which is a counter-part of motives with modulus in the Hodge theory. We proved that the Nori category arising from curves with modulus is equivalent to Laumon 1-motives. This is an extension of a result of Ayoub and Barbieri-Viale that considers the case without modulus.

研究分野：数論幾何

キーワード：代数学 数論幾何 代数幾何学 整数論

1. 研究開始当初の背景

- (1) Voevodsky の構成した混合モチーフの三角圏では、ホモトピー不変性という強い性質が大前提として扱われている。その結果、加法的部分を含む可換代数群・微分形式や de Rham-Witt 微分形式・相対ピカル群・代数曲線の一般ヤコビ多様体のように、重要な対象でありながら Voevodsky の理論では扱えない研究対象が多く残された。また、加法的高次 Chow 群・モジュラス付き高次 Chow 群・特異多様体の Levin-Weibel Chow 群など、近年になって導入された代数的サイクルの重要な不変量でもホモトピー不変でないものが多い。そこで、ホモトピー不変でないモチーフや代数的サイクルの理論が多方面から研究されてきた。
- (2) このような理論を構築するためには、ホモトピー不変性が変わる原理を見いだす必要がある。そこで有力視されてきたのが Weil 相互律である。その一つの根拠は Bruno Kahn 氏と私の共同研究で、ここでは Voevodsky の圏におけるテンソル積が、染川 K-群と呼ばれている Weil 相互律を用いて定義された群により、正しく計算できるということが示されている。これは Voevodsky の理論においてホモトピー不変性を Weil 相互律で置き換えた理論が構築できる可能性を強く示唆する。
- (3) 同様の現象は、Hodge 理論でも追及されていた。Deligne による混合 Hodge 理論はもはや古典であるが、Bloch と Srinivas は 2000 年の論文でこの理論には拡張の余地があることを指摘し、enriched Hodge 構造の理論を展開した。これはのちに Barbieri-Viale, Mazzari, 加藤和也, Russell などによりさらなる発展が試みられてきたが、部分的な結果にとどまっていた。なお、(1)との関連では、これはホモトピー不変ではないモチーフの Hodge 実現として現れるべきものである。
- (4) 実はこれらの理論のお手本となるべきものが、1990年代にすでに考察されていた。それは Laumon 1-モチーフの理論である。Deligne は(3)に述べた混合 Hodge 構造の研究において、Deligne 1-モチーフの理論を展開した。これは次元以下の多様体から生じるモチーフの圏であり、半アーベル多様体と有限生成自由アーベル群からなる。これを一般の(加法的部分を含みうる)可換代数群と形式群にまで拡張したのが Laumon 1-モチーフである。複素数体上では、Deligne 1-モチーフの圏はレベル 1 の混合 Hodge 構造の圏と同値になる。同様に Laumon

1-モチーフの理論を Hodge 理論的に解釈するという試みは、今世紀に入ってから(3)で挙げた多くの研究者によりなされていた。

2. 研究の目的

- (1) Voevodsky による「ホモトピー不変移送付き前層」の理論を一般化し、Weil 相互律に基づく「相互層」の理論を構築する。これは加法的部分を含む可換代数群・微分形式や de Rham-Witt 微分形式・相対ピカル群・代数曲線の一般ヤコビ多様体などを扱える必要がある。また、それをもとにして、Voevodsky モチーフの三角圏の拡張となる「ホモトピー不変とは限らないモチーフの三角圏」の理論を探求する。
- (2) モチーフ理論に(1)で述べたような一般化があるとすれば、その実現として混合 Hodge 構造の理論にも対応する一般化があるはずである。これには enriched Hodge 構造をさらに一般化することが必要となる。また、次元の場合には Laumon 1-モチーフとして理解されるべきである。このような理論も追及する。
- (3) これらの理論はまだ全容が不明であり、その素性は手探りで探っていくよりほかにないという段階にある。そのため、代数曲線の相対ピカル群や一般ヤコビ多様体、微分形式や de Rham-Witt 微分形式など、ホモトピー不変でない理論における重要な対象については、あらゆる側面から調査を進めていきたい。また、ホモトピー不変でない代数的サイクルの群についても同じように考察を進める。

3. 研究の方法

本課題はその性質上、研究の方法はもくもくと考え続けることが中心となる。もう一つ重要な点は、国内外の多くの研究者と交流し、議論を交わすことである。本課題においてはその点を重視して、次の研究集会を開催することにより討論の機会を設けた。

- (1) Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016. 函館アリーナ、2016年5月30～6月1日。
- (2) Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017. 函館北洋ビル8階ホール、2017年5月29～5月30日。

また、以下の研究集会においても副代表者およびプログラム委員として開催に協力した。

- (3) 代数的整数論とその周辺 2017, 京都大学数理解析研究所、2017年12月4～

12月8日.

これらは自身が開催に関わった研究集会であるが、そのほかにも多くのワークショップに参加し、研究成果を発表するとともに、参加した研究者と討論を行った。(具体的な情報は、下の[学会発表]の欄を参照のこと。)より多くの時間を使って踏み込んだ議論を行うために、国外から共同研究者の Kay Rülling 氏、Florian Ivorra 氏、Yifan Yang 氏を東北大学に招聘した。逆に、私が彼らの所属研究機関を訪問することも行った。以下に述べる研究成果はすべて、これらの討論から生まれたものである。

#### 4. 研究成果

- (1) Florian Ivorra 氏と共同で、モジュラス付き曲線の Nori モチーフと Laumon 1-モチーフについて研究した。最近の Ayoub と Barbieri-Viale の研究では、アフィン曲線と被約な因子の組から生じる Nori モチーフが Deligne 1-モチーフの圏と同値になることが証明していた。この拡張として、被約とは限らないモジュラス付き曲線から生じる Nori モチーフを構成し、基礎体が代数体の場合はそれが Laumon 1-モチーフと同値になることを証明した。この結果は論文(1)として出版された。さらに、ここでの構成を一般化し、高次元の非特異完備多様体と二つの因子の組に対してその相対コホモロジーに「モジュラス付き混合 Hodge 構造」を(関手的に)入れられることを証明した。モジュラス付き混合 Hodge 構造とは、Deligne の混合 Hodge 構造の拡張であり、Bloch-Srinivas の enriched 混合 Hodge 構造や Barbieri-Viale の形式 Hodge 構造のさらなる一般化ともみなせる。また、この対象に対するポアンカレ双対性も証明した。さらに、この構成を応用することで、加藤・Russell による「モジュラス付き Albanese 多様体」を「モジュラス付き Albanese 1-モチーフ」に拡張することができた。これらの結果はプレプリントとしてまとめ、arXiv で公開した。
- (2) 「相互層」について、Bruno Kahn 氏および斎藤秀司氏と共同研究を行った。これは Voevodsky による「ホモトピー不変移送付き前層」の一般化であり、その基礎理論として、次のような結果を証明した: 相互層の Zariski 層化は Nisnevich 層化に一致して相互層となること、開埋め込みに対する単射性条件を満たすこと、射影直線に関する不変性を満たすこと、などである。また、より具体的な結果は以下のようなものがある。まず、曲線の一般ヤコビ多様体の拡張として、高次元の多様体に対してもモジュラス付き Chow
- 群を表現する相互層が存在する。これはモチーフ理論における新しい重要な研究対象であると期待される。また、可換代数群で表現される層、およびホモトピー不変な移送付き前層は相互層であることも示した。さらに、Kay Rülling 氏によって Kähler 微分形式の層(正標数における) de Rham-Witt 部分形式の層も相互層であることが示された。これらの成果をまとめた論文は(3)として出版された。さらに、この研究を発展させることで、Voevodsky のモチーフの三角圏の拡張である「モジュラス付きモチーフの三角圏」を構成し、相互層の圏との関係を追及した。この結果は二本のプレプリントとしてまとめ、arXiv で公開した。
- (3) Kay Rülling 氏との共同研究で、相対曲線のモジュラス付き Suslin ホモロジーを計算した。これは Suslin-Voevodsky によるモジュラスのない計算を一般化したものとみなせる。しかしながら、モジュラスがあるとホモトピー不変性が成り立たないため、証明には全く異なる原理が必要となる。この結果は論文(4)として出版された。また、のちに斎藤秀司氏によって研究された相互層の純性の証明においても重要な役割を果たした。
- (4) モジュラー曲線のヤコビ多様体の有理点のねじれ部分は、数論における重要な研究対象として Mazur をはじめとする多くの人により研究されてきた。同様な問題を、カスプをモジュラスとする一般ヤコビ多様体に対して考えることができる。Yifan Yang 氏との共同研究で、レベルが素数の冪の場合にこの問題に満足のいく解答を得ることができた。この結果は論文(2)として出版された。さらに Fu-Tsun Wei 氏との共同研究で、レベルが平方因子を持たない場合に同様の結果を得た。さらに、正標数関数体上で Drinfeld モジュラー曲線に対する類似も得ることができた。これらの結果はプレプリントとしてまとめ、arXiv で公開した。
- (5) 小林真一氏と共同で、 $p$ -進ソリトン理論の研究を行った。これは佐藤幹夫による KP 階層のソリトン理論の  $p$ -進版であり、 $p$ -進タウ関数が中心的な役割を果たす。ここで特徴的なのは数論幾何への応用で、特に代数曲線のヤコビ多様体の形式群が  $p$ -進タウ関数と密接に関係することが明らかにされた。さらに、Manin-Mumford 予想への応用として、ある種の(大きい自己同型群を持つ)代数曲線に対して、そのヤコビ多様体のテータ因子上にある有限位数の点の分布について強い制限が得られる。この結果は論文(5)として出版された。

- (6) Pol Vanhaecke 氏・井上玲氏との共同研究で Beauville 系と呼ばれる代数的完全可積分系の拡張を研究した。この力学系をスペクトル曲線があるタイプの自己同型を持つ場合に制限し、そこに付加構造を入れることで新しい代数的可積分系を構成した。この結果は論文(6)として出版された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

- (1) Florian Ivorra and Takao Yamazaki, Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives. *Canadian Journal of Mathematics* (掲載決定、掲載号は未定), 査読あり.
- (2) Takao Yamazaki and Yifan Yang, Rational torsion on the generalized Jacobian of a modular curve with cuspidal modulus. *Documenta Mathematica*, Vol. 21 (2016), 1669-1690, 査読あり.
- (3) Bruno Kahn, Shuji Saito and Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves. (With two appendices by Kay Rülling.) *Compositio Mathematica*, Vol. 152, No. 9, (2016) 1851-1898, 査読あり.
- (4) Kay Rülling and Takao Yamazaki, Suslin homology of relative curves with modulus. *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 93, No. 3 (2016), 567-589, 査読あり.
- (5) Shinichi Kobayashi and Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. *Asian Journal of Mathematics*, Vol. 20, No. 2 (2016), pp. 323-352, 査読あり.
- (6) Rei Inoue, Pol Vanhaecke and Takao Yamazaki, Algebraic integrable systems related to spectral curves with automorphisms. *Journal of Geometry and Physics*, 87, (2015), 198-216, 査読あり.

[学会発表](計17件)

- (1) Takao Yamazaki, Mixed Hodge structures with modulus. *Motives in Tokyo*, 2018年3月29日、東京大学、東京.
- (2) Takao Yamazaki, Mixed Hodge structures with modulus. *Seminario*, L'Università

degli Studi di Milano, 2018年3月23日、ミラノ大学、イタリア.

- (3) Takao Yamazaki, Mixed Hodge structures with modulus. *Les Séminaires Géométrie et Systèmes Dynamiques*, 2018年3月15日、ブルゴーニュ大学、フランス.
- (4) Takao Yamazaki, Generalized Jacobians of modular and Drinfeld modular curves. *北陸数論研究集会*, 2017年12月27日、富山大学、富山.
- (5) Takao Yamazaki, Toward Hodge theory with modulus. *TIMS Seminar in Algebraic Geometry*, 2017年11月17日、国立台湾大学、台湾.
- (6) Takao Yamazaki, Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives. *Regulators in Niseko 2017*, 2017年9月7日、ニセコヒルトンビレッジ、北海道.
- (7) Takao Yamazaki, Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives. *Academia Sinica colloquium*, 2017年3月9日、台湾中央研究院、台湾.
- (8) 山崎隆雄、「モチーフとモジュラス」(連続講義) 2016年10月24日~28日、東京大学、東京.
- (9) Takao Yamazaki, Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives. *Differential forms in algebraic geometry*, 2016年9月20日、フライブルグ大学、ドイツ.
- (10) Takao Yamazaki, Nori motives of curves with modulus and Laumon 1-motives. *Japan-Taiwan Joint conference on Number theory 2016*, 2016年9月10日、國家理論科學研究中心、台湾.
- (11) Takao Yamazaki, Motives with modulus. *Algebraic K-theory and Motivic Cohomology*, 2016年6月29日、Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach、ドイツ.
- (12) Takao Yamazaki, Rational torsion on the generalized Jacobian of a modular curve with cuspidal modulus. *Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016*, 2016年5月30日、北海道.

(13) Takao Yamazaki, Motives with modulus. Generalizations of A1-Homotopy Invariance in Algebraic Geometry and Homotopy Theory, 2016年4月5日、Zinnowitz/Usedom、ドイツ.

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ( )

(14) Takao Yamazaki, Motives with modulus. 整数論セミナー、2016年2月23日、國家理論科學研究中心、台湾.

研究者番号 :

(4) 研究協力者 ( )

(15) Takao Yamazaki, Motives with modulus. Motives in Tokyo, 2016年2月15日、東京大学、東京.

(16) Takao Yamazaki, Motives with modulus. Algebraic geometry seminar, 2015年11月19日、レンヌ大学、フランス.

(17) Takao Yamazaki, Non-homotopy invariant motive theory. Workshop on arithmetic geometry at Tambara 2015, 2015年6月2日、群馬.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況(計 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 隆雄 (Takao Yamazaki)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号 : 00312794

### (2) 研究分担者

( )