

令和元年6月3日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04774

研究課題名(和文)ゼータ関数の関係式と特殊値を中心とする数論の研究

研究課題名(英文)Number theory around the relations and the values of zeta functions

研究代表者

大野 泰生 (Ohno, Yasuo)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：70330230

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：主に荒川-金子と金子-津村の多重ゼータ関数および、その正と負の整数点での値すなわち多重ゼータ(スター)値と多重ベルヌーイ数について研究を行った。和山氏との共同研究ではこれらのゼータ関数の t -補間を定義し、その値について正の場合は t -多重ゼータ値、負の場合はLanden型の補間をした多重ベルヌーイ多項式で明示した。佐々木氏との共同研究では多重ベルヌーイ数の有用な漸化式を解明し、川崎氏との共同研究では多重ベルヌーイ多項式の生成アルゴリズムを解明し多重ポリログとの新たな関係を指摘した。さらに2色有向グラフと多重ゼータ値の関係を証明の簡素化に応用する研究など多種の課題に取り組んだ。

研究成果の学術的意義や社会的意義

整数論における対称性に優れた研究対象のひとつとしてゼータ関数とその特殊値がある。この多変数化あるいはポリログを用いた深化版も含めて、その関数そのものや特殊値のもつ潜在的な対称性や調和についてあまらず解明することを目標として研究を推進している。このように数論的に優れた性質とされる特徴を持つ関数の理論は有効で、身近な例におけるガロア理論や超幾何関数の理論、数理物理や結び目の不変量の理論とも強い繋がりをもつ。この領域に広がる重要性の高い多重数列について、その対称性の高い関係を構造的あるいは統一的に解明することに取り組み、それらの値の生成する有理数体上の環の構造を解明するための情報を多数収集した。

研究成果の概要(英文)：We mainly studied multiple zeta functions defined by Arakawa--Kaneko and Kaneko--Tsumura, and their values at both positive and negative integral points, namely multiple zeta and zeta-star values and multi-poly-Bernoulli numbers. In particular, we defined t -interpolation of Arakawa--Kaneko and Kaneko--Tsumura multiple zeta functions and gave its special values at positive integral points in terms of t -multiple zeta values, and also gave its values at negative integral points in terms of Landen type interpolated multi-poly-Bernoulli polynomials. Moreover as a joint work with Sasaki, we obtain a kind of recursion relation of multi-poly-Bernoulli numbers. As a joint work with Kawasaki, we found a type of generating algorithm of multi-poly-Bernoulli polynomials, and newly pointed out a basic connection of them to truncated multiple zeta values. Moreover we studied many topics including the usage of relations among two-colored ordered graphs and multiple zeta values.

研究分野：数論

キーワード：多重ゼータ値 多重ベルヌーイ数 有向グラフ 荒川金子ゼータ関数 概均質ベクトル空間 反復積分
2元3次形式 簡約理論

1. 研究開始当初の背景

様々な必要性から定義されている多様なゼータ関数とその特殊値について、垣間見える優れた性質に比して知られている事柄はまだ少ない。多変数を含むゼータ関数の多くは古典的なリーマンゼータ関数の一般化であり、リーマンゼータ関数の持つ多数の優れた性質を受け継ぐことが知られあるいは期待されている。例えばオイラー由来の多変数化のひとつである、多重ゼータ関数については、特殊値の間の極めて簡素な対称性が知られているほか、ArakawaとKanekoによってポリログを用いて定義された多重ゼータ関数とも繋がりを持つなど、不思議な調和が見て取れる。超幾何関数との相性にも優れ、厳選されたパラメータを抽出し、それに基づく母関数を構成することで、超幾何関数の優れた性質に議論を持ち込める場面も多数存在する。幾何学的な不変量との関わりも徐々に解明されつつあり、このような多種多様な分野や対象の重要な性質と陰に陽に繋がりをもつことが次第次第に解明されつつある。代表者は特殊値そのものの性質と併せて特殊値や関数の相互関係に注目してこれまで研究を展開してきた。とりわけ、多重ゼータ値のなす環の構造解明、およびそれに連関する各種の数列すなわちベルヌーイ数やオイラー数や自己同型性を持つグラフのつくる数列、2元3次形式の類数などの、数論的性質や相互関係などに主軸を置いて、特殊値そのものの性質の解明と併せて研究を行ってきた。本研究はそのさらなる進展と深化を目指したものである。

2. 研究の目的

リーマンゼータ関数のポリログを用いた一般化である Arakawa-Kaneko のゼータ関数とその類似である Kaneko-Tsumura のゼータ関数は、負の整数点では期待通りの多重ベルヌーイ数を値にもつが、正整数点では、不思議なことに、多重ゼータ値と多重ゼータスター値を特殊値にもつ。従来からベルヌーイ数の定義には大別して2つの流儀があり、我々はそれぞれをBタイプ、Cタイプと呼ぶことにしている。古典的な場合に数列としての差は第2項の正負の差のみであり、その他は一致し区別がつけがたいが、多重化した場合には相互関係は解明されているものの、互いにやや異なる挙動をとる。謎なのは、これら2種の多重ベルヌーイ数が、それぞれ上述の Arakawa-Kaneko と Kaneko-Tsumura のゼータ関数の負の整数点での値として現れることで、これらのゼータ関数をもよおすBタイプとCタイプに区別しているように見受けられる。そしてそれらのゼータ関数の正整数点での値は、多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値というこちらも古典的に自然に2種類定義されている実数とそれぞれ結びつく。元来、多重ゼータ値が等号付きか否かということと、ベルヌーイ数のBタイプCタイプは同じ方向性の話題ではない。しかし、このように対として存在した2組が見事に平行に関係付けられることは大きな謎と言わざるを得ない。このように多重ゼータ値、多重ベルヌーイ数、多重オイラー数、2元3次形式の類数、グラフの個数から定まる数列などは、各々謎めいた対称性と調和を携えており、その現象には気付くことができても背後に隠れた原因について解明できている事実は非常に少ない。他方優れた対称性を備える数学的对象は社会技術への転用の可能性を多く含み、楕円曲線暗号などの例を挙げるまでもなく多数の数学的成果が活用されている場面は多い。数学的により自然な対象におけるより豊かで優れた調和と対称性は、将来の社会基盤を支える一助となる期待が大きく、その詳らかな解明こそが研究の目的である。

3. 研究の方法

先に述べたように多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式族は多種多様な理論と手法から導かれるものであるが、その中で近年登場した有限2色半順序集合のハッセ図を用いた反復積分値のグラフ表示(Yamamotoの積分表示)を用いる手法や、複シャッフル関係式の2変数非可換多項式環のワードとしての記述、良質のパラメータに注目することによる母関数とその(超幾何)微分方程式の算出、あるいは古典的な合同式による数列の一般項の持つ数論的性質の解明、また組合せ論において知られた対象との相互関係の解明などの具体的な手法を用いて、多角的にゼータ関数および多重ゼータ関数の特殊値の持つ対称性と調和について解明を進めた。

4. 研究成果

リーマンゼータ関数のポリログを用いた一般化である Arakawa-Kaneko のゼータ関数とその類似である Kaneko-Tsumura のゼータ関数について和山氏との共同研究において t 補間を与えた。これは、通常考えられていたような t 補間されたポリログではうまく構成できず、ランデン型接続公式を踏まえたポリログの補間を準備し、それを用いて t -Arakawa-Kaneko ゼータ関数を定義した。正整数点での特殊値は、Yamamoto の t -多重ゼータ値が現れ、負整数点での値としては、ランデン型の補間ポリログによって定義される多重ベルヌーイ多項式に相当するものが現れた。また同様の手法で、Kaneko-Tsumura のゼータ関数の側から補間ゼータ関数を定義した場合に、前者との関係が t と $1-t$ の取りかえというシンプルな変換で一致することも解明し、改めて対称性に優れた関数が得られることが判明した。また、川崎氏との共同研究では、Yamamoto による2色ポセットに付随する積分のグラフ表示を用いて、Kaneko-Tsumura によって

得られていた Arakawa-Kaneko および Kaneko-Tsumura のゼータ関数の正整数点での特殊値の多重ゼータ値による明示公式に、より視覚的な別証明を与え、論文発表も完了した。佐々木氏との共同研究では、ポリオイラー数の数論的および組合せ論的性質を解明した論文を公開し、多重ベルヌーイ数とその一般化について、ハンケル行列を用いた計算から見出される漸化式を 2 通りに証明した。この漸化式は多重ベルヌーイ数の場合にその性質から、上指数の変化に対する漸化式と見ることもでき、通常の下添え字に関する漸化式とは趣を異にする。またこういった固定された上指数に関する閉じた形での漸化式の存在の有無が、多重ベルヌーイ数を定義した Kaneko の著書において検討されるべき問題として挙げられているが、これにポジティブな答えを与えた結果ともいえる。また小松氏との共同研究では、レーマー型のベルヌーイ数の一般化について詳細な研究を行い、具体的にレベル 3 の場合（すなわちレーマーの扱ったケース）において、この数列のもつ合同関係式について成果を得た。また川崎氏との新たな共同研究において、既存の Akiyama-Tanigawa と Chen のアルゴリズムの擦れをほどこき、それによって多重を含むベルヌーイ多項式に対する一般的な生成アルゴリズムを得た。この生成アルゴリズムの整頓と一般化自体もこの数列の調和を表現しているが、加えて多重インデックスの多重ベルヌーイ数の場合の初期数列の情報から、このアルゴリズムと多重ポリログあるいは切断多重ゼータ値との新たな関わりが見えた点も収穫であった。また代数体に付随する整数環上での 2 元 3 次形式の類数に関する計算を行い、情報を収集した。またグラフの数え上げについても一般的なグラフに巡回置換を導入し、有限群の操作として同型性を見る研究も行った。ほか多様な視点での研究討論を行った。これらの成果について、順次論文を執筆し、一部が公開を済ませた。また、サンテチェンヌ大学、リール大学、台湾大学での国際研究集会における講演をはじめとして、多数の学会口頭発表により成果を公開した。また、各年度 5 回、4 年間の合計 20 回の関西多重ゼータ研究会を共同で主催したほか、Gangl を招いての国際研究集会や、若手育成のための青葉山ゼータ研究集会など、複数の研究集会を主催者として開催した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

(1) Naho Kawasaki and Yasuo Ohno, Combinatorial proofs of identities for special values of Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, *Kyushu J. Math.* 72 215-222 2018 年 [査読有り]

(2) Yasuo Ohno and Yoshitaka Sasaki, On poly-Euler numbers, *J. Aust. Math. Soc.* 103 126-144 2017 年 [査読有り]

(3) Daniel Anderson, Shuzo Izumi, Yasuo Ohno, and Manabu Ozaki, GCD and LCM-like identities for ideals in commutative rings, *J. Algebra Appl.* 15(1650010) 1-12 2016 年 [査読有り]

(4) Daniel Anderson, Takashi Aoki, Shuzo Izumi, Yasuo Ohno and Manabu Ozaki, A GCD and LCM-like inequality for multiplicative lattices, *Tamkang J. Math.* 47 261-270 2016 年 [査読有り]

(5) Kumi Kobata and Yasuo Ohno, Edge colored complete graphs and a generalization of self complementarity, *Utilitas Mathematica* 101 3-12 2016 年 [査読有り]

〔学会発表〕(計 27 件)

(1) Yasuo Ohno, On special values of the multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko type, RIKEN Number Theory Seminar, 2019 年 3 月.

(2) 大野泰生, 荒川-金子の多重ゼータ関数の値とその周辺, 概均質セミナー@早稲田大学早稲田キャンパス, 2019 年 1 月.

(3) 大野泰生・川崎菜穂, 2 色半順序集合と荒川-金子型ゼータ関数の特殊値, 2018 年度 応用数学合同研究集会, 2018 年 12 月.

(4) 大野泰生, 秋山-谷川アルゴリズム決定版, 新潟代数セミナー, 2018 年 11 月.

(5) 佐々木義卓・大野泰生, Recurrence formulas for poly-Bernoulli numbers and their combinatoric interpretations, 「解析的整数論とその周辺」RIMS 共同研究(公開型), 2018 年 10 月.

(6) 大野泰生, Bernoulli 多項式のアルゴリズムと多重ゼータ値, 2018 大分熊本鹿児島整数論研究集会, 2018 年 10 月.

(7) Yasuo Ohno, Interpolation of Arakawa-Kaneko and Kaneko-Tsumura multiple zeta functions, Taiwan-Japan Joint Workshop on Multiple Zeta Values, 2018 年 8 月.

(8) 川崎菜穂・大野泰生, 多重ポリベルヌーイ多項式に対する Akiyama-Tanigawa 及び Chen のアルゴリズムの統一的一般化, 2017 年度応用数学合同研究集会, 2017 年 12 月.

(9) 大野泰生, 荒川-金子のゼータ関数の一般化について (和山裕嗣氏との共同研究), 2017 大分熊本整数論研究集会, 2017 年 10 月.

(10) 佐々木義卓・大野泰生, 制限付きロンサム行列の数え上げ, 日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会, 2017 年 9 月.

(11) 和山裕嗣・大野泰生, 荒川-金子型ゼータ関数の補間について, 日本数学会秋季総合分科会 代数学分科会, 2017 年 9 月.

(12) Yasuo Ohno, Multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Kaneko-Tsumura and their values, Various Aspects of Multiple Zeta Functions ~Conference in Honor of Kohji Matsumoto's 60th Birthday~, 2017 年 8 月.

(13) 大野泰生, 2-posets から 2-posets に架かる多重ゼータの橋, 第 34 回代数的組合せ論シンポジウム, 2017 年 6 月.

(14) 大野泰生, 荒川-金子ゼータで繋がる 2 色半順序集合族, 解析数論セミナー, 2017 年 5 月.

(15) 大野泰生, 多重ゼータ値と 2 色半順序集合の繋がり, 東北大学整数論セミナー, 2017 年 5 月.

(16) 大野泰生, 荒川-金子型多重ゼータ関数について, 第 21 回 早稲田大学整数論研究集会, 2017 年 3 月.

(17) Yasuo Ohno, On Arakawa-Kaneko multiple zeta functions, French-Japanese zeta functions, 2017 年 3 月.

(18) 大野泰生, From complete bipartite graphs to Hasse diagrams via multiple zeta values, 研究集会「量子論にまつわる数学と数論の連携探索」, 2017 年 3 月.

(19) 佐々木義卓・大野泰生, 多重ベルヌーイ数の零化公式とその応用, 2016 年度応用数学合同研究集会, 2016 年 12 月.

(20) 大野泰生, 多重ベルヌーイ数とその周辺, 富山大学理学部数学教室談話会, 2016 年 10 月.

(21) 佐々木義卓・大野泰生, 一般多重ベルヌーイ数の和公式, 日本数学会秋季総合分科会 代数学分科会, 2016 年 9 月.

(22) 大野泰生・佐々木義卓, ある 2 部グラフの数え上げと多重ベルヌーイ数について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016 年 8 月.

(23) 大野泰生, 多重ベルヌーイ数の組合せ論, 第 33 回代数的組合せ論シンポジウム, 2016 年 6 月.

(24) 大野泰生, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, 第 9 回 ゼータ若手研究集会@沖縄船員会館, 2016 年 2 月.

(25) 大野泰生, 多重ベルヌーイ数および関連する話題, 第 11 回「代数学と計算」研究集会 AC2015@首都大学東京, 2015 年 12 月.

(26) 大野泰生, 多重ゼータ値の複シャッフル関係式と重み付き和公式, 近畿大学数学教室講演会, 2015 年 11 月.

(27) Yasuo Ohno, On poly-Euler numbers, French-Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications @Univ. Jean Monnet, Saint-Etienne, France, 2015年9月.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。