

平成 30 年 6 月 24 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04775

研究課題名(和文) 保型形式を用いた対称性の探求

研究課題名(英文) A study of symmetry using the theory of automorphic forms

研究代表者

三枝崎 剛 (MIEZAKI, Tsuyoshi)

琉球大学・教育学部・准教授

研究者番号：60584068

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：符号・格子・頂点作用素代数という、互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。3者は類似した性質を数多く持ち、例えば最小距離やt-デザインという概念が、それぞれに定義されている。特に符号はもともと情報伝達の手段、効率化を目的に導入された概念であり、実生活にも幅広い応用を持つ。従って3者の分類問題は、実生活への応用上も、数学的にも面白い重要な問題である。本研究の目的は、これら3者の分類に向けて、それぞれの数学的性質(最小距離やt-デザイン)を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study is the classification of the codes, the lattices, and the vertex operator algebras, from the point of view of the automorphic forms and the design theory.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：符号 格子 頂点作用素代数 マトロイド 保型形式 重さ多項式 タット多項式 高種数化

1. 研究開始当初の背景

符号・格子・頂点作用素代数 (以後 VOA と呼ぶ) という、互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。符号から格子及び VOA が構成出来、格子から VOA が構成出来るように、3者は類似した性質を数多く持ち、例えば最小距離や t -デザインという概念が、それぞれに定義されている。特に符号はもともと情報伝達的手段、効率化を目的に導入された概念であり、実生活にも幅広い応用を持つ。従って3者の分類問題は、実生活への応用上も、数学的にも面白い重要な問題である。

本研究の目的は、これら3者の分類に向けて、それぞれの数学的性質 (最小距離や t -デザイン) を明らかにする事である。例えば、それぞれに定義されている、最小距離の上界の決定や、 t -デザインの t の値の決定は、3者の分類へ役立つ事が知られており、本研究の目的である。

2. 研究の目的

(1) 符号について

Z_{2k} を法 $2k$ で考えた整数環とする。有限環 Z_{2k}^n の部分 Z_{2k}^n -加群を長さ n の SZ_{2k} -符号と呼ぶ。ある場所 A から離れた場所 B へと情報を伝達する際、その確実性・効率性等の研究として、符号理論は始まった [Shannon (1948)]。符号の元の間には、ある距離が定義されており、符号の元の個数に比べて最小距離 (最小となる距離) が大きい符号は、情報通信の際、高い誤り訂正能力を持ち、実は数学的にも面白い対象である。つまり、符号の元の個数を固定した時、最小距離は出来る限り大きくしたい。また、 Z_{2k} -符号において、対称性の高い自己双対という性質を持ち、かつ符号の全ての元と 0 との距離が、 $4k$ の倍数となる符号は、Type II 符号と呼ばれ、特に興味深く、分類が重要問題である。

1つの分類の手段として Z_{2k} -符号に対して、最小距離 d_k の上界が調べられてきた。例えば Type II Z_2 -符号については [Mallows-Sloane (1973)] によって、Type II Z_4 -符号は [Bonnecaze, et al. (1997)] によって、 Sd_k の上界が決定されている。この上界を達成する時、符号は極限的と呼ばれる。極限的な符号は高い誤り訂正能力をもち、更に、数学的に興味深い組合せデザインと呼ばれる。対称性の高い構造を持つ。即ち、最小距離の上界を決定する事は、数学的にも、性能の良い極限的な符号の発見においても重要である。しかし一方で、極限的な Type II Z_2 -符号は、長さ n が十分大きい時、存在しない事が分かっている [Mallows-Sloane (1973)]。

また符号の重さ多項式は、多項式不変量としてよく知られている。

しかしこれは完全不変量ではない。多変数化して完全不変量とする試みは、数多くある。

しかし一方で、符号と同値な概念である線形マトロイドには、タット多項式と呼ばれる、符号の重さ多項式と同値な概念がある。しかし符号の場合と異なり、多変数化への研究は数少ない。

本研究では、多変数化重さ多項式を参考にして、タット多項式の変数化を目指す。

(2) 格子について

球面 t -デザイン [Delsarte, et al. (1977)] という概念がある。 X を、 d 次元球面上の有限集合とする。 t 次以下の任意の多項式 $f(x)$ に対して、 $f(x)$ の球面上の平均と、有限集合上の平均が一致する時、 X は球面 t -デザイン (以後 t -デザインと呼ぶ) と呼ばれる。 X が t -デザインだが、 $(t+1)$ -デザインでない時、 t を X のデザインの強さと呼ぶ。

球面デザインの構成法に格子を用いるものがある。ユークリッド空間 R^n の格子 L とは、 R^n の基底 e_1, \dots, e_n に対して、 $L = Ze_1 + \dots + Ze_n$ と定義される。ここで、格子の原点からの距離が等しい格子点の集合 (シェルと呼ぶ) は、球面上の点集合と考えられ、格子から球面デザインを構成する方法とは、そのシェルから t -デザインを構成しようというものである。シェルのデザインの強さを決定すると、格子の分類に役に立ち [Nottebaum (1995)]、また以下に述べる様に整数論への応用もある。従って、シェルのデザインの強さの決定は重要な問題である。

(3) 頂点作用素代数について

散在型の有限単純群の中で、最も位数の大きい群は、モンスター群と呼ばれる。モンスター群に関するムーンシャイン予想の解明の為に、[Borcherds (1986)] によって導入された頂点作用素代数 (以後 VOA と略す) という概念がある。近年 [Huy"ohn (2008)] により、球面デザインの類似として、VOA に対し共形 t -デザインという概念が定義された (以後 t -デザインと呼ぶ)。VOA の対称性が高いほど、 t の値が大きくなるように定義されている。

また近年、マシュームーンシャイン現象 (以後 M 現象と略す) が発見され、多くの数学者と物理学者の関心を集めている。この現象はある物理現象から導き出される保型形式に関係した関数「擬テータ関数」に、一見無関係なマシュー群の持つ量 (指標値) が現れる、というミステリアスなものである。先に述べたように、ムーンシャイン現象から VOA が生み出されたように、今回見つかった M 現象の解明は、予想もしていなかった新たな数学を生み出す可能性のある、非常に重要な問題である。

(4) マトロイドと群論、符号との関係

Cameron により、マトロイドと群論、符号との関係が得られている。それはマトロイドと群論、符号のそれぞれの不変量であるタ

ット多項式，重さ多項式，タット多項式に関するものである．重さ多項式は高種数化，つまり多変数化されている．このことから，他の2者についても高種数化が得られるのではないかと，との問題意識を得た．実際，興味深い高種数化を得ることができ，今後はそれらのマトロイドと群論，符号への応用を目指す．そして符号と線形マトロイドの類似性をより強固なものとし，符号・格子・VOA・線形マトロイドの新たな4者の類似関係を基にした研究方針を打ち出す．

3．研究の方法

符号・格子および頂点作用素代数には，不変式，保型形式と密接に結び付く．特にデザイン理論と最小距離の理論と関係する．報告者は，不変式・保型形式の対称性を調べる事で，デザインと最小距離への応用を目指した．また，マトロイドと群論，符号それぞれの不変量であるタット多項式，重さ多項式，タット多項式の関係性を調べた．

長さ 48 の立方重偶符号は Betusmiya-Munemasa にて分類されている．この符号のデザインを調べた．大変興味深いことにアスマス マトソンの定理から得られるデザインで，かつより高い組み合わせ構造を持つ符号を発見した．これは Bachoc の得た harmonic weight enumerator の理論を用いる．このような符号は現在まで見つかっておらず，今回が初めての発見である．このような符号の存在は否定的な意見も多かった．実際，極限的符号に関しては多くの長さで非存在が証明されている．

またこの問題の格子や頂点作用素代数における類似問題を考えると，それは整数論の有名未解決問題 Lehmer 予想と関係する．このような観点からも，今回の発見は興味深い．

また，大浦学氏（金沢大学）により定義されたアイゼンシュタイン多項式の性質も研究した．アイゼンシュタイン多項式とは，アイゼンシュタイン級数の類似物として定義されたものである．報告者は，アイゼンシュタイン級数とアイゼンシュタイン多項式の類似した性質が，アイゼンシュタイン多項式のゼータ関数まで引き継がれていることを見出した．これにより，斉次多項式のゼータ関数の研究の重要性が一層明らかになった．

現在までに，大浦学氏（金沢大学）との共同研究において，符号を有限群とみなした際のサイクル多項式の変数化に成功している．1変数の場合には，サイクル多項式とタット多項式の類似性はよく知られており，その関係も参考にしながら，タット多項式の変数化を得ている大浦学氏（金沢大学），佐久間雅氏（山形大学），篠原英裕氏（山形大学）．

またマトロイド理論におけるタット多項式からの，符号へのアプローチはこれまでの研究が少ない．本研究では，このアプローチも取り入れ，3者への応用を目指した．

4．研究成果

(1)ある極限的符号の組合せ構造を決定した（論文）．デザイン理論は，符号，格子，頂点作用素代数それぞれにおいて展開されており，3者に多くの類似が存在する．例えば E_8 格子のシェルは7-デザインで，ムーンシャイン頂点作用素代数のシェルは11-デザインだが，それぞれ8-デザインになるか，12-デザインになるかどうかは，ラマヌジャンの関数の非ゼロ性と同値である．これは整数論と組合せ論の関係を示唆し，多くの研究者により興味を持たれている．本研究では，この現象の符号における類似を考え，多くの極限的符号は6-デザインにならないことを示した．

(2)マッシュームーンシャイン現象と関連する関数の関係を調べた（論文作成中）．本研究では，マッシュームーンシャイン現象に現れるモックテータ関数の係数の合同式を調べた．興味深いことにマッシュームーンの位数や共役類と関係する式が多数得られた．これは群論と整数論の新たな関係を示唆するものである．

(3)アスマス マトソンの定理から得られるデザインで，かつより高い組み合わせ構造を持つ符号を発見した（論文投稿中）．(1)で述べたように，デザイン理論は，符号，格子，頂点作用素代数それぞれにおいて展開されており，3者に多くの類似が存在する．例えば符号におけるアスマス マトソンの定理の類似が，格子や頂点作用素代数において成立する．それは E_8 格子のシェルは7-デザインで，ムーンシャイン VOA のシェルは11-デザインというものである．それぞれ8-デザインになるか，12-デザインになるかどうかは，ラマヌジャンの関数の非ゼロ性と同値であった．ラマヌジャンの関数は非ゼロと予想されており，つまり E_8 格子のシェルは8-デザインにならない，ムーンシャイン VOA のシェルは12-デザインにならないと予想されている．本研究では，符号において，アスマス マトソンの定理から得られる1-デザインが，特別なシェルで2-デザインになる現象を発見した．ラマヌジャンの関数の非ゼロと予想されていることもあり，このように特別なシェルでデザインが上がること大変興味深い．

(4)アイゼンシュタイン多項式とアイゼンシュタイン級数の新たな類似を発見した（論文作成中）．大浦学氏（金沢大学）によって発見されたアイゼンシュタイン多項式は，アイゼンシュタイン級数と多くの類似を持つ．本研究では，アイゼンシュタイン多項式のゼータ関数もアイゼンシュタイン級数と多くの類似を持つことを示した．

(5)タット多項式の高種数化を得た（論文作

成中). 符号の重さ多項式とマトロイドのタット多項式は関係する. 符号の重さ多項式は多変数版(高種数化と呼ぶ)が存在する. 本研究ではタット多項式の高種数化を得た.

(6) サイクルインデックスの高種数化を得た(論文投稿中). 符号の重さ多項式と符号から得られる置換群のサイクルインデックスは関係する. 符号の重さ多項式は多変数版(高種数化と呼ぶ)が存在する. 本研究ではサイクルインデックスの高種数化を得た. サイクルインデックスは多くの応用がある. 例えば数え上げ理論において本質的な役割を果たす. 本研究で得たサイクルインデックスの高種数化も, 数え上げ理論への応用があると予想している.

(7) 72次元極限的格子の持つデザイン論的性質を得た(論文投稿中). (3)で述べたように, ラマヌジャンの関数は非ゼロと予想されている. もっと一般に, セールは多くのカスプ形式のフーリエ係数は非ゼロと予想している. 本研究では, あるカスプ形式のフーリエ係数の非ゼロ性と, 72次元極限的格子のシエルが12-デザインかどうか, 同値な問題であることを指摘した.

(8) Universally concyclic に関する前原潤氏(琉球大学)の予想を解決した(論文投稿中). これにより, 格子の新たな不変量を定義した. これが完全不変量となるかどうかは, 興味深い問題である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

— Tsuyoshi Miezaki, Hiroyuki Nakasora, An upper bound of the value of t of the support t -designs of extremal binary doubly even self-dual codes, Des. Codes Cryptogr., 査読有, 79-1, 2016, 37-46. DOI: 10.1007/s10623-014-0033-7

[学会発表](計1件)

— Tsuyoshi Miezaki, デザイン理論について, 大阪組合せ論セミナー, 2016年6月18日, 大阪市立大学梅田サテライト.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/tmiezaki>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三枝崎 剛 (MIEZAKI, Tsuyoshi)

琉球大学・教育学部・准教授

研究者番号: 60584068

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

