

令和 2 年 7 月 8 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04777

研究課題名(和文)有限群のコホモロジー論

研究課題名(英文)Cohomology theory of finite groups

研究代表者

佐々木 洋城 (SASAKI, HIROKI)

信州大学・学術研究院教育学系・教授

研究者番号：60142684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：有限群の表現論ではブロック・イデアル(ブロック)を研究するが、近年はそのソース多元環が注目されている。その一つの不変量としてブロックのコホモロジー環が研究されている。それが、ソース多元環が定めるブロックのデフェクト群のコホモロジー環からの写像の像として得られると予想しているが、本研究ではテーム表現型のブロック、デフェクト群がエクstraspecial p-群であるブロックについてこの予想を確認した。デフェクト群がリース2-群についてはソース多元環の直和因子によって定められる写像の像がコホモロジー環に一致することが確かめられた。その過程で、ソース多元環の加群構造について、新たな、重要な知見を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限群のブロック(イデアル)のコホモロジー環に対してはホモロジー代数的手法が適用できず、表現論の深い理解が必要である。本研究は、ブロックのコホモロジー環同士にも、通常のコホモロジー環と同様に、然るべき写像が存在するべきであるという予想の証明に向かったの第一歩を印したものである。その過程で、ブロックのソース多元環の直和因子についての存在と重複度についての定理を提出したが、これはソース多元環の加群構造に関して停滞していた研究に新たな重要な進展をもたらした。

研究成果の概要(英文)：Block ideals of finite groups are objects in representation theory of finite groups; nowadays their source algebras are in main concern. Cohomology rings of block ideals are a kind of invariants of the source algebras. We expect that the cohomology rings of block ideals are the images of the maps from the cohomology rings of defect groups which is induced by the source algebras. In this study we have established that this conjecture holds for blocks of tame representation type and with defect groups isomorphic with extraspecial p-groups; we have also verified for block with defect groups isomorphic with wreathed 2-groups that their cohomology ring is the image of maps induced by a direct summand of the source algebras. In course of investigation of these block we have proved theorems concerning direct summands of the source algebras, which are so important.

研究分野：代数学

キーワード：有限群 ブロック・イデアル コホモロジー環 デフェクト群 ソース多元環 部分対

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

有限群のコホモロジー理論は当然にホモロジー代数的手法と有限群特有の事象の解析によって研究される。例えば、有限群 $G$ とその部分群 $H$ について $G$ の通常のコホモロジー環 $H^*(G, k)$ から $H$ のコホモロジー環 $H^*(H, k)$ への写像や逆向きの写像が定義され、これらによって両者のコホモロジー環を関連付けて考察することができるのである。

一方、有限群のブロック・イデアルのコホモロジー環にはホモロジー代数的手法が通用しない。なぜなら、ブロック・イデアルのコホモロジー環は双対複体のコホモロジー環としては定義できないからである。ブロック・イデアルのコホモロジー環はデフェクト群のコホモロジー環の、ブロック・イデアルに付随する「部分節」とよばれるものの融合を記述するある表現論的なカテゴリーに関して安定な部分環として定義される。そのカテゴリーは Brauer カテゴリーと呼ばれている。Brauer カテゴリーをつぶさに解析しなければならないのである。

しかし、ブロック・イデアルのコホモロジー環は、通常のコホモロジー理論で観察される「通常のコホモロジー環は部分群の融合を記述するカテゴリーに関して安定な部分環である」という事実をブロック・イデアルの部分節に対して敷衍して定義されたものであり、有限群 $G$ の主ブロックと呼ばれる特別なブロック・イデアル $B_0(G)$ のコホモロジー環は通常のコホモロジー環 $H^*(G, k)$ に同型なのであるから、一般にブロック・イデアルのコホモロジー環の間にも当然、上記のようなある種の写像が定義されるべきであると思われる。例えば、ブラウアー対応で対応するブロック・イデアルのコホモロジー環の間に写像を定義したい。ブラウアー対応で対応するブロック・イデアルの Brauer カテゴリーに関連付けを見出すか、あるいは、別の視点から写像を定義することができれば、逆にこれをもとにして Brauer カテゴリーの関連づけの見通しが得られるかもしれないのである。

### 2. 研究の目的

ブロック・イデアルのコホモロジー環をそのブロック・イデアルのデフェクト群のコホモロジー環からの写像としてとらえたい。その写像はブロック・イデアルのソース多元環が引き起こすものであることを示すことが目的である。この写像は、ブラウアー対応で対応するブロック・イデアルのコホモロジー環の間の写像を定義するとき基礎となるべきものである。さらに、ブロック・イデアルのコホモロジー環を研究するための新たな (Brauer カテゴリーの解析への依存をより少なくする可能性のある) 方法を提供しようとするものである。

### 3. 研究の方法

ブロック・イデアル $B$ のソース多元環 $A$ が引き起こす $B$ のデフェクト群 $P$ のコホモロジー環 $H^*(P, k)$ の写像 $T_A$ を調べるためには、ソース多元環の加群構造を解析しなければならない。しかし、ブロック・イデアルのソース多元環は取り扱いが困難で加群構造についてはほとんど知られて来なかった。

そのため、当面の方法として、デフェクト群の構造を指定して、二面体群、準二面体群、(一般)四元数群、リース2群、エクTRASPECIAL  $p$ -群の場合に考察した。まず、ブロック・イデアル $B$ のコホモロジー環を $B$ のデフェクト群 $P$ のコホモロジー環 $H^*(P, k)$ からのある写像 $T_P^B$ の像として表した。次にその写像の構成要素から、ソース多元環 $A$ の加群としてのある直和因子の存在を示した。さらに、ソース多元環 $A$ の加群としてのある直和因子でその引き起こすコホモロジー環の写像が0写像でないものを特定し、写像 $T_P^B$ がブロック・イデアルのソース多元環が引き起こす写像 $T_A$ であることが確かめられた。その過程では、ソース多元環の加群構造の解析や部分対の融合に関する解析を行った。なお、上記の写像 $T_P^B$ を構成する方法は研究代表者によって開発されたものである。

### 4. 研究成果

有限群の標数 $p$  ( $p$ は素数)の代数的閉体上のブロック・イデアルのソース多元環の加群構造に関する定理を二つ発見した。(定理 A および定理 C) これらを用いて対象としていたブロック・イデアルについて一つを除いて解決し、残りの一つも大きく前進した。

以下では、 $k$ を標数 $p$ の代数的閉体とし、 $B$ を有限群 $G$ の $k$ 上のブロック・イデアルとし、 $P$ をそのデフェクト群とする。 $P$ に付随して極大部分節 $(P, b_p)$ をとる。

定理 A  $P$ の部分群 $Q$ が定める部分対 $(Q, b_Q) \subset (P, b_p)$ が本質的部分対のときその惰性部分群に属するある元 $x$ とデフェクト群 $P$ で生成される両側加群 $k[PxP]$ はソース多元環の直和因子に同型であり、その重複度は体 $k$ の標数 $p$ を法として1に合同である。

この定理により、次の命題が得られた。

命題 B  $p = 2$ で、デフェクト群が二面体群、準二面体群、(一般)四元数群、 $p > 2$ でデフェクト群がエクTRASPECIAL  $p$ -群の場合に、研究代表者が構成した写像 $T_P^B$  (その像はブロック・イデアルのコホモロジー環を与える) はソース多元環の引き起こす写像 $T_A$ である。特に、上記のブロック・イデアルのコホモロジー環は写像 $T_A$ の像に一致する。

なお、ソース多元環 $A$ の $(kP, kP)$ 両側加群としての直和因子については、ソース多元環の理論の創始者である Puig により、40年以上前に、極大部分節 $(P, b_p)$ の惰性群に属する元により生成される $(kP, kP)$ 両側加群が直和因子として重複度1で現れることが示されていたが、定理 A は

未解明であった他の直和因子についての初めての重要な進展である。

デフェクト群がリース2群であるブロック・イデアルについては研究代表者が構成した写像  $T_P^B$  の構成要素には定理 A を適用できないものがある。これは、別の種類の直和因子が存在することを示唆するものである。実際、次の定理を得た。

定理 C  $G$  の元  $x$  により生成される両側加群  $k[PxP]$  が定めるコホモロジー環  $H^*(P, k)$  の移送写像が 0 写像でなく、さらに、デフェクト群  $P$  と  $P$  の  $x$  による共役部分群との共通部分  $S$  が定める部分対  $(S, b_S) \subset (P, b_P)$  に関するいくつかの条件が満足されるとき、両側加群  $k[PxP]$  はソース多元環の直和因子に同型であり、その重複度は体  $k$  の標数  $p$  を法として 1 に合同である。

この定理により、次の命題が得られた。

命題 D  $p = 2$  で、デフェクト群がリース2群であるブロック・イデアルに対して研究代表者が構成した写像  $T_P^B$  はソース多元環  $A$  のある直和因子が定めるものである。

デフェクト群がリース2群であるブロック・イデアルについては、最終的な確認には至らなかったが、非常に大きな前進である。以上のように、具体的な考察の対象としていたブロック・イデアルについては、目的がほぼ達成されたといつてよい。一般に、どのブロック・イデアル  $B$  についてもそのソース多元環  $A$  の引き起こす写像  $T_A$  の像として  $B$  のコホモロジー環が得られるという予想の理論的解決にはなお道のりはあると言わざるを得ないが、本研究の過程でソース多元環  $A$  の加群構造に関する知見が得られたり、部分対の融合の様子から写像  $T_P^B$  を構成する方法が得られることが示唆されるなど、ブロック・イデアルのコホモロジー環の理論の発展に貢献できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Okuyama and H. Sasaki	4. 巻 497
2. 論文標題 A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 92-101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2017.10.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 ブロックイデアルのソース多元環の加群構造について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 ブロックイデアルのソース多元環の加群構造
3. 学会等名 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造
3. 学会等名 理科大表現論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造について
3. 学会等名 第29回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 ブロック・イデアルのソース多元環の加群構造(2)
3. 学会等名 理科大表現論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐々木洋城
2. 発表標題 デフェクト群がextraspecial $p$ -群であるブロック・イデアルのコホモロジー環
3. 学会等名 日本数学会 2018年度年会(2018.3.18~3.21)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐々木 洋城
2. 発表標題 extraspecial $p$ -群をデフェクト群とするブロック・イデアルについて
3. 学会等名 有限群論草津セミナー(第28回)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐々木 洋城
2. 発表標題 Source algebras and cohomology rings of blocks with extraspecial defect groups
3. 学会等名 有限群のコホモロジー論とその周辺
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐々木 洋城
2. 発表標題 defect 群が extraspecial p-群である block ideal について
3. 学会等名 第31 回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	奥山 哲郎 (OKUYAMA TETSURO)  (60128733)	北海道教育大学・教育学部・元教授  (10102)	
連携研究者	渡邊 アツミ (WATANABE ATUMI)  (90040120)	熊本大学・自然科学研究科・名誉教授  (17401)	
連携研究者	飛田 明彦 (HIDA AKIHIKO)  (50272274)	埼玉大学・教育学部・教授  (12401)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	宇野 勝博  (UNO KATSUHIRO)  (70176717)	大阪大学・全学教育推進機構・教授    (14401)	