様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４７７８

研究課題名（和文）数論的誤差項の短区間平均値定理とその応用

研究課題名（英文）The mean value theorem of an arithmetical error term in short intervals and its application

研究代表者
谷川　好男（Tanigawa, Yoshio）

名古屋大学・多元数理科学研究科・招へい教員

研究者番号：５０１０９２６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：我々は数論的誤差項のトング型公式を一般化されたセルバーグクラスのゼータ関数に対してすでに得ていたが，本研究ではそれを用いて数論的誤差項の短区間平均値定理を導いた．またその応用として，３次約数問題の誤差項の shifted convolution の評価，符号変化に関して新しい結果を得た．さらにトング型公式を,ゼータ関数の臨界線上での平均値の冪指数で書き表し,より汎用性の高いものにした．
ホールは1999年にリーマンゼータ関数の導関数の2乗等の近似関数等式を導いたが，我々はティッチュマルシュの方法を拡張することにより，ホールの得ている結果の誤差項の評価を改良した．

研究成果の概要（英文）： We derived the mean square formula in short intervals for an arithmetical error term by using the Tong-type truncated formula which we had already established for zeta-functions in the extended Selberg class. We applied our theorems to the study of the three-dimensional divisor problems and got the new results for the shifted convolutions and the sign changes of its arithmetical error term. Furthermore,we remade our Tong-type truncated formula in term of the exponent of the mean square of the zeta-function on the critical line.
In 1999, Hall derived the approximate functional equations for the square of the derivative of the Reimann zeta-function and other functions. By generalizing the method of Titchmarsh, we improved the estimates of Hall's error terms.

研究分野： 解析的整数論

キーワード： 短区間平均値定理　数論的誤差項　Tong型の公式　3 次元約数問題　符号変化　shifted convolution　リーマンゼータ関数の導関数　近似関数等式

１．研究開始当初の背景

数論的関数 a(n)の研究では a(n)の x までの総和が重要な問題となる．主要項は多くの場合初等関数で表されるから,主な研究対象はその誤差項 E(x) (これを数論的誤差項と名付けている.) の挙動,すなわち E(x)の上からの評価,２乗平均，高次冪平均などである．E(x) の研究で重要なのは E(x) のヴォロノイ公式であるが，ただゼータ関数の次数が少し大きくなるとヴォロノイ公式自身の誤差項が大きくなってしまうという難点がある．私はそれまでの研究で，ヴォロノイ公式の誤差項をいくつかの積分項で表示するトング型の公式を，一般化されたセルバーグクラスのゼータ関数に対して拡張し，すでにいくつかの場合に応用した．短区間平均値定理も始めていたが，まだ不十分なところがあった．この研究課題では，トング型の公式を用いて短区間平均値をじっくり研究するのが一つの動機であった．

もう一点は,ゼータ関数の導関数の２乗の近似関数等式の誤差項の改良である．私はそれまで浜松医科大学の古屋淳氏，山口大学の南出真氏(連携研究者)と，ゼータ関数の導関数に関して数論的誤差項の研究をしていたが，それを通して 1999 年のホールの論文を知り，その中で残されている問題を解決したいと思うようになった．

２．研究の目的

(1) 短区間平均値定理とは，数論的誤差項 E(x) に対して，$(E(x+U)-E(x))^2$ の [T, T+H] に於ける積分の評価を意味する．ここで U, H は T 以下のパラメーターである．これは 1984 年にユティラが，ディリクレ約数問題の誤差項に対して行ったのが最初である．一見奇妙な平均値定理であるが，多くの応用を持つことからその後盛んに研究されるようになった．本研究の第一の目的は，次数が d のゼータ関数の係数和から得られる数論的誤差項の短区間平均値定理を,トング型の公式を用いて導き,それをいくつかの数論的な問題に応用するということであった．すでに応用を考え始めていたが，トング型の公式を用いて初めて得られる結果を出すことを目的とした．

(2) 次数 d のゼータ関数に対し，σ+it における２乗平均が $X^{1+\varepsilon}$ で抑えられるためのσの下限をσ^*とする．トング型の公式が使えるためには$\sigma^*<(d+1)/(2d)$ という条件が必要である．実はこれはかなり強い条件である．そのため現時点では，例えばランキン-セルバーグゼータ関数などに直接には使えない．そこでゼータ関数の臨界線 1/2+it における 1 乗平均，2 乗平均の冪指数を使って，トング型の公式を作り直し，上記条件がなくとも使えるようにすることを目的とした．

(3) ハーディー・リトルウッドの非常に有名な定理に$\zeta^2(s)$ の近似関数等式がある．彼らの定理では誤差項に $((x+y)/2\,|t|)^{1/4}$なる余分な因子が含まれていたが，後にティッチュマルシュが非常に巧妙な方法で誤差項からこの因子を取り除くことに成功したという歴史的な経緯がある．1999 年の論文でホールは $\zeta'(s)^2$, $\zeta(s)\zeta''(s)$, $\zeta'(s)\zeta''(s)$ の近似関数等式を導いたが，ハーディー・リトルウッドの方法に従ったため，誤差項に同じ因子が含まれていた．ホール自身，ティッチュマルシュの方法によってそれをとりのぞくことに言及しているが，一方でベッセル関数の取り扱いが難しいということを述べている．我々はすでにゼータ関数の微分約数問題に興味を持ってやっていたので，このホールの問題を解決することを目標にした．また微分約数問題の拡張として，$\zeta^{(k)}(s)$ と ある種のディリクレ級数の 1 階微分の積の係数和から初等的な方法で数論的誤差項を取り出し，そのチャウラ・ヴァルムの表示や評価を与えることも目標とした．

３．研究の方法

(1) ユティラ型の短区間平均値定理を我々のトング型の公式を使って導くのが目的であったが，そもそもトング型の公式というのは，私とツァオ 氏(北京石油化工学院)，ジャイ氏(中国鉱業大学(北京))の３人で，トングの古典的な結果を，一般セルバーグクラスのゼータ関数から生ずる数論的誤差項に対して一般化したものである．短区間平均値定理もそれまでの研究の継続であり,ツァオ氏,ジャイ氏との共同研究として行った．常時メールで連絡を取り合い，初年度の八月に約２週間北京に彼らを訪れ，集中的に議論を行った．

(2) 研究開始当初から，トング型の公式を適用するための強い条件を何とか弱めたいと思っていた．その条件はトング型公式に出てくる無限積分の評価を行うところから生じてくる．平成 28 年度，29 年度の八月にツァオ氏,ジャイ氏を訪れたとき，問題の積分の扱いを議論し，臨界線上でのゼータ関数の平均値の冪指数を用いてトング型公式を表すべくセミナー等を行った．

(3)この研究は浜松医科大学の古屋淳氏，山口大学の南出真氏(連携研究者)とともに行った．研究遂行のために定期的に山口大学でセミナーを開催した．初年度には$\zeta'(s)^2$の近似関数等式について，次年度には $\zeta(s)\zeta''(s)$と$\zeta'(s)\zeta''(s)$ の近似関数等式について余分な因子を取り除くことに成功した．また微分約数問題の拡張についても指数対などを使って評価を試みた．

４．研究成果

(1) トング型の公式は，数論的誤差項を 7 つの項 $R_j(x)$ $(j=1,\ldots,7)$ の和として表現し

ている．短区間平均値定理を考えるとき二つの方法が考えられる．一つは $R_j(x)$ $(j=2,...,7)$ としては元の表示法を使う方法，もう一つは $R_j(x)$ (特に $j=2$)にも短区間の差を取っている効果が出るようにパラメーターを選ぶという方法である．我々は両方の方法で短区間平均値定理を導いた．両者を比較すると,パラメーター U，H の大きさに応じて，第１の方法が有効な場合と，第２の方法が有効な場合があることが分かった．これらの定理の応用として，ベール・ブラウニング・マラシンハ・ツァオの $d_3(n)$ の shifted convolution の評価と，$d_3(n)$から生ずる数論的誤差項$\Delta_3(x)$の符号変化の研究を行った．shifted convolution に関してベール達の方法は初等的であるが，我々は問題の和を短区間平均値の形が適用できるように変形し，我々の定理を適用した．一方イヴィッチ・ウーも shifted convolution を別の方法で研究しており，この３者の評価を比較検討した．一方 E(x)の符号変化の研究では，符号変化が必ず起きる区間の長さを求めることと，符号変化が起きない区間がどの程度あるかを調べることの二つの方向がある．前者はすでにトングがやっており，我々は一般のセルバーグクラスの場合にも拡張した．後者は約数関数の場合に，ヒース-ブラウン・ツァンの研究があり，そこではユティラの短区間平均値定理が有効に使われた．$\Delta_3(x)$ の符号変化(正確には符号変化が起きない区間)を調べるに当たって，ヒース-ブラウン・ツァンの方法に従い，我々の短区間平均値定理を$(\Delta_3(x+u)-\Delta_3(x))^2$ の u が[0，U]を動くときの最大値の,[T,T+H]における x に関する積分の形に変形するという方法をとった．この平均値には我々の第２の短区間平均値定理が有効に働き，それを用いて，$|\Delta_3(x)|$ が $cT^{1/3}$ より大きくなる区間がどの程度存在するかの定理を得た．$\Delta_3(x)$に関しては初めての定理であると思われる．

(2) この研究は,$\sigma^*<(d+1)/(2d)$ という条件を取り除き，1/2+it 上の平均値定理の冪指数だけでトング型の公式を記述するのが目的であった．(1)で述べたように，トング型の公式は $R_j(x)$ $(j=1,...,7)$ の和として表示されている．$R_1(x)$ はヴォロノイ公式と同じであって，$R_j(x)$ $j=2,3$ がトング型の公式で最も重要な部分である．それらは E(u)と指数関数を含んだ積分 $I(\lambda,M,N,y)$で記述されている．この積分の平均値を求めるため，ゼータ関数を含んだ無限積分に変形する．上記の強い条件というのはいわゆる second derivative test を使って評価したときこの無限積分が収束するための条件である．我々は積分区間を細分することで first derivative test と second derivative test を使い分け，トング型の公式をゼータ関数の臨界線上での１乗積分と２乗積分の冪指数を用いて表すことができた．これから改めて短区間平均値定理を導くと，改良される場合とされない場合があることにも気づいた．この辺の詳細な研究は今後の課題である．またランキン・セルバーグゼータ関数の数論的誤差項の２乗平均に関しても考察した．E(u)の短区間平均値定理から本来の平均値定理を導くと，従来の方法では冪指数が 13/7であったが,新しい方法では9/5を得た．ただこの値はイヴィッチが全く別の方法で得ている値と同じで，残念ながら改良はできなかった．ちなみに予想は 7/4 である．

(3) 全般的な方針はティッチュマルシュの論文に従った．まず$\zeta'(s)^2$，$\zeta(s)\zeta''(s)$，$\zeta'(s)\zeta''(s)$の exact formulas を求めた．それらはベッセル関数と log v の冪の積分で表示されており，ホールも述べているように非常に複雑である．我々は exact formulas をハーディ-・リトルウッドの有名な Lemma βを拡張することにより,ある種の指数和に変換し，それにファン-デア-コルプトの定理を適用することで $((x+y)/2t)^{1/4}$ を取り除くことに成功した．これらは 2016 年の日本数学会秋季総合分科会，2017 年日本数学会年会で発表した．一方微分約数問題の拡張についても，初等的な方法で数論的誤差項のチャウラ・ヴァルムの表示を導き，指数和に変換した後,指数対の理論を使って上からの評価を得た．ある場合には従来知られているものより大幅に改良された評価を得た．これは 2017 年日本数学会秋季総合分科会で発表した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

① J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, Titchmarsh's method for the approximate functional equations for $\zeta'(s)^2$, $\zeta(s)\zeta''(s)$, $\zeta'(s)\zeta''(s)$, Canadian J. Math. 掲載決定(2018),査読有, https://cms.math.ca/cjm

② J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, On representations of the error term related to the derivatives for some Dirichlet series, Illinois J. Math.61 (2017), 187-209 査読有, https://projecteuclid.org/euclid.ijm/1520046215

③ J.Furuya, M.Minamide,Y.Tanigawa, On a new circle problem, J. Australian Math.Soc.103 (2017),231-249, 査読有 doi:10.1017/S1446788716000525

④ X.Cao, Y.Tanigawa, W.Zhai, Continued fraction expression of the Mathew series, Mathematical Inequalities Applications 19 (2016), 1039-1048 査

読有,doi:10.7153/mia-19-77.

⑤ X.Cao, Y.Tanigawa, W.Zhai, Tong-type identity and the mean square of the error term for an extended Selberg class, Science China Math. 59 (2016), 2103-2144,査読有,doi:10.1007/s11425-015-0706-2.

⑥ J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problem, Math. Slovaca 66 (2016), 575-582,査読有, doi:10.1515/ms-2015-0160

⑦ J.Furuya, M.Minamide, Y.Tanigawa, On a restricted divisor problem, J. Indian Math. Soc. 83 (2016), 269-287, 査読有, https://www.infromaticsjornals.com/index.php/jims

⑧ X.Cao,J.Furuya,Y.Tanigawa,W.Zhai, On the mean of the shifted error term in the theory of the Dirichlet divisor problem, Rocky Mountain J. Math.46 (2016), 105-124, 査読有.doi:10.1216/RMJ-2016-46-1-105

⑨ X.Cao, Y.Tanigawa, W.Zhai, On the mean square of an arithmetical error term of the Selberg class in short intervals, International J. Number Theory, 12 (2016),1675-1701, 査読有, doi:10.1142/ S1793042116501037.

⑩ X.Cao, Y.Tanigawa, W.Zhai, Mean square of the error term in the asymmetric multi-dimensional divisor problem, Func. Approx. Commen. Math. 52 (2016), 173-193,査読有, doi:10.7196/facm/2016.54.2.4.

⑪ I.Kiuchi, M.Minamide,Y.Tanigawa, On a sum involving the Mobius function, Acta Arith. 169.2 (2015), 149-168,査読有, doi:10.4064/aa169-2-3.

〔学会発表〕（計１２件）

① 井川祥彰,古屋淳,南出真,谷川好男, On the number of k-free integers <x which are coprime to m, 日本数学会年会, 2018年3月,

,

② D.Banerjee,南出真,谷川好男, Bounds of double zeta-function, 日本数学会年会, 2018年3月.

③ 井川祥彰,古屋淳,南出真,谷川好男, kと互いに素な約数の最大数の平均について日本数学会中国・四国支部会例会, 2018年１月.

④古屋淳,南出真,谷川好男,ゼータ関数の微分に関連した約数問題について,日本数学会秋季総合分科会, 2017年9月.

⑤古屋淳,南出真,谷川好男,ζ(s)ζ"(s), ζ'(s)ζ"(s)の近似関数等式について,日本数学会年会,2017年3月.

⑥古屋淳,南出真,谷川好男,条件付きメビウス関数の和について,日本数学会中国・四国支部会例会,2017年1月

⑦古屋淳,南出真,谷川好男,ζ'$(s)^2$の近似関数等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 2016年9月.

⑧谷川好男, Some topics on the derivative of the Riemann zeta-function, 2016-Workshop on Analytic Number Theory, Xi'an Jiaotong University, 2016年8月.

⑨古屋淳,南出真,谷川好男,制限約数問題について, 日本数学会年会, 2016年3月.

⑩古屋淳,南出真,谷川好男, 円問題及び一般約数問題の微分化, 日本数学会中国・支部会例会,2016年1月

⑪谷川好男,短区間平均値定理について, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月.

⑫古屋淳,南出真,谷川好男, 微分円問題における有限型 Voronoi 公式,日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕 なし

６．研究組織
(1)研究代表者
谷川 好男（TANIGAWA Yoshio）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・招へい教員
研究者番号：50109261

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
南出 真（MINAMIDE Makoto）
山口大学・大学院創成科学研究科・講師
研究者番号：80596552