

平成 30 年 4 月 16 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04782

研究課題名(和文) リー理論と代数の表現論の研究

研究課題名(英文) Research on Lie theory and representation theory of algebras

研究代表者

有木 進 (Ariki, Susumu)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：40212641

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ヘッケ代数はリー理論において重要な位置を占める有限次元代数であり、今日では円分ヘッケ代数という広いクラスに一般化されている。本研究課題ではアフィンC型に注目し、アフィンA型の場合に重要な役割を果たすスペヒト加群をアフィンC型の場合に構築することを主たる目標とした。この研究計画は予定通りの成功をおさめ、研究成果はarXiv:1703.06425に公開済である。さらに基礎体が奇標数の代数閉体という仮定の下で古典型ヘッケ代数のブロック代数の表現型の完全な決定に成功したばかりでなく、有限表現型の場合に代数構造まで明らかにすることができた。研究成果は査読付論文誌に出版済である。

研究成果の概要(英文)：Hecke algebras are finite dimensional algebras which occupy an important position in Lie theory. Nowadays they are generalized to wider class of cyclotomic quiver Hecke algebras. In this research, we have studied the cyclotomic quiver Hecke algebras for affine type C aiming at construction of Specht modules, in view of the fact that Specht modules play an important role in the representation theory of the cyclotomic Hecke algebras of affine type A. The research is successful and the results are in the preprint arXiv:1703.06425. Furthermore, assuming that the base field is algebraically closed of odd characteristic, we have not only determined the representation type of block algebras of Hecke algebras of classical type but also have determined the algebra structure of those of finite representation type. The results are published as a refereed paper in a journal.

研究分野：表現論

キーワード：ヘッケ代数 表現型

1. 研究開始当初の背景

ヘッケ代数はリー理論において重要な位置を占める有限次元代数である。リー理論では種々の体上で定義された古典型代数群の既約加群の分類・構成や、カズダン・ルスティク予想の記述など、ヘッケ代数が半単純の場合の研究が中心であったが、研究代表者は1990年代からヘッケ代数のモジュラー表現論を発展させてきた。研究を推進する基本的道具は研究代表者によるヘッケ代数の加群圏を用いた圏化理論であった。たとえば2種類の自然数が等しいという等式があれば、これを2種類の有限集合の全単射があるので個数を数えてこのような等式が得られるのだ、と考えると自然数の等式を集合の等式にアップグレードすることができる。同様に、2種類の表現加群の同型写像があれば、これを2種類の圏の同値があつてそれぞれの圏に完全関手が作用しており、グロタンディエク群をとれば元の同型写像が復元できるのだ、と考えるのが圏化である。研究代表者の圏化理論ではアフィンA型リー代数の可積分加群の圏化を考える。すなわち、ヘッケ代数の加群圏のグロタンディエク群の直和が可積分加群を実現する。2000年代に入ると、ホバノフ・ラウダが籐ヘッケ代数および円分籐ヘッケ代数を導入し、カン・カシワラは円分ヘッケ代数の圏化理論を他のリー型に一般化した。ここで我々の興味は圏化自体にあるのではなく、圏化に使われる有限次元代数にある。なぜなら籐ヘッケ代数と円分籐ヘッケ代数は各々A型アフィンヘッケ代数とA型・B型ヘッケ代数の一般化であり、その表現論を知ろうとするのは自然なことだからである。籐ヘッケ代数に関してはクレシュチェフ等による研究が行われたが、円分籐ヘッケ代数に関してはブランダン・クレシュチェフの同型定理により研究代表者の結果を利用できるアフィンA型しか結果がない状況であった。

2. 研究の目的

研究当初は上記のような状況であったため、他のリー型の円分籐ヘッケ代数の表現論を明らかにしたいと考え、本研究課題ではとくにアフィンC型に注目した。というも低ランクでの実験から、アフィンA型の場合において重要な位置を占めるスペイト加群理論がアフィンC型の場合も存在するのではないかと、とくにセルラー代数ではないかと予想したからである。セルラー代数とはリー理論によく現れる有限次元代数のクラスで、セル鎖という特別な性質をもつ両側イデアル列をもつことを要請したものである。セルラーと分かれば既約表現の分類やセル加群と呼ばれるよい加群の集合が得られる。例えば対称群やヘッケ代数はセルラー代数で、スペイト加群がセル加群になる。このことからスペイト加群理論の構成が重要であることがわかるであろう。さて、以上の研究課題は従来から知られていたアフィンA型以外の円分籐ヘッケ代数の表現論を明らかにする方向性

であるが、他方で、古典型ヘッケ代数自体の表現論についてもまだ明らかにすべき点が多々あり、ヘッケ代数のブロック代数の表現型の決定をもうひとつの研究目標とした。表現型とは直既約加群の分類の可能性を示す指標であり、ここでは有限表現型・順表現型・暴表現型と分類することが目標である。さらに、第2の研究課題として、基礎環が完備離散附値環の特殊双列代数の直既約格子表現の分類問題のうち、とくにヘラー格子を含む安定アウスランダー・ライテン籐の連結成分を決定する問題を挙げた。なぜなら基本重みに付随する円分籐ヘッケ代数が順表現型のときには特殊双列代数になる例ばかりが得られるので、特殊双列代数自体の表現論も現在研究対象になっているためである。

3. 研究の方法

種々の研究集会に参画して新しい研究動向を調査し、また種々の文献を通じて利用可能な証明手法を習得する。また、表現論研究者との研究討論を通じ有効なアイデアを得る。このような純粋数学研究では標準的な方法で研究を行った。

4. 研究成果

まず主たる研究テーマであるアフィンC型のスペイト加群理論の構成であるが、ソウル市立大学のウイヨンパク准教授の協力も得て一般的な構成に成功した。アフィンC型円分籐ヘッケ代数を用いた圏化にはアフィンC型フォック空間が使われる。このフォック空間はアフィンA型の圏化理論に現れるフォック空間の剰余パターンの変更により得られるものであり、基底が多重ヤング図形でラベル付けされる。そこで、アフィンA型と同様、スペイト加群が多重ヤング図形ごとに構成されることが期待されたのであるが、研究の結果期待通りとなった。さらに、無限C型の場合にはアフィンA型と同様標準盤を基底に持つ加群として実現できることがわかった。本研究におけるスペイト加群構成の成功の理由のひとつはカシワラがパク准教授を含めた韓国の若手研究者と構築した、籐ヘッケ代数のR行列の理論である。そのため証明は籐ヘッケ代数での議論を円分籐ヘッケ代数の理論に落とす形で行われる。アフィンC型はかなりアフィンA型に似ており、アフィン同様の手法が他のアフィンリー型に適用できるのかについては今後の検討課題である。本研究成果についてまとめた論文はarXivで公開済みであり、現在投稿中である。本研究はアフィンA型を初めて超えた結果として注目され、シドニー大学のマタス教授が2017年12月にシンガポールで開催された国際研究集会において本論文のアフィンC型に関する予想とセルラー代数になることの証明を与えたとアナウンスした。

次に、もうひとつの研究目的である古典型ヘッケ代数のブロック代数の表現型の決定であるがこれも十分以上の研究成果を得た。古典型ヘッケ代数のブロック代数の表現型

を決定するには、B型ヘッケ代数のブロック代数の場合が本質的である。すなわち、A型の場合はすでに知られており、D型の場合は基礎体が奇標数という仮定の下で研究代表者の過去の研究を併用することで処理できるからである。さて、B型ヘッケ代数の場合、ブロック代数は、A型ヘッケ代数のブロック代数2個のテンソル積代数かまたはアフィンA型リー代数のレベル2の可積分加群の重み空間の圏化に現れるブロック代数であるが、前者は、有限表現型と順表現型のA型ヘッケ代数のブロック代数の代数構造がよくわかっていて、表現型を容易に決定できる。つまり後者が本質的である。この場合表現型決定に用いた手法はこの研究の前に扱っていた基本重みに付随する円分籠ヘッケ代数に対し用いた手法と同様であるが、レベル2であるため、導来圏同値で同値類に分けた上で、その代表元としてよい代数を選んで表現型を調べることになる。リッカルトの定理とクラウゼの定理により自己入射代数の表現型は導来圏同値で不変であるから代表元に対して調べれば十分だからである。こうして古典型ヘッケ代数のブロック代数の表現型を決めることができたわけであるが、本研究は表現型決定以上の成果を副産物として得ることとなった。これは研究集会で研究情報を収集する過程で有限表現型セルラー代数に関するオーマツの定理を知ったのがきっかけである。オーマツの定理とは有限表現型の対称セルラー代数の分類定理である。古典型ヘッケ代数のブロック代数はすべてセルラー代数であるから、オーマツの定理を援用することでリッカルト星形定理と呼ばれるブラウアー木代数の導来同値類の分類定理を利用することが可能になる。そして表現型決定以外に古典型ヘッケ代数の有限表現型ブロック代数の構造が既約加群の同型類の個数だけで決まること、より具体的には例外頂点をもたない直線というブラウアー木に付随するブラウアー木代数にかならず森田同値になることが証明できた。ただし基礎体は奇標数の代数閉体とする。以上の研究成果をまとめた論文はAdvances in Mathematicsに出版された。また、この研究成果についてはシンガポールで開催された国際研究集会での招待講演等で成果を発表した。有限表現型ブロック代数に関する結果は例外型ヘッケ代数の場合にも成り立つと予想している。完備離散附値環上の特殊双列代数に対してヘラー格子を含むアウスランダー・ライテン籠の連結成分を決定する研究テーマについてはもっとも簡単な一変数多項式環の商環の場合に加瀬遼一・宮本賢伍との共著論文をNagoya Mathematical Journalに出版した。ここでヘラー格子とは剰余体上の特殊双列代数の加群を完備離散附値環上の特殊双列代数の加群と思って射影被覆を取り、その核に現れる直既約因子のことをいう。この結果については、韓国数学会70周年記念集會に

日本数学会推薦の講演者として招待講演を行ったときに発表した。その後共同研究者の宮本賢伍がこの方向での研究を始めたことから、本研究課題遂行期間にこの研究をさらに進めることは行わなかった。本研究課題にはA型ヘッケ代数のジェームズ予想の反例の精査についても触れているが、この点に関してはとくに進展はなかった。以上をまとめると、円分籠ヘッケ代数の表現論に関し、従来アフィンA型に留まっていた研究を初めてアフィンA型以外、具体的にはアフィンC型で展開し、スペイト加群の構成という成果をあげたこと、また古典型ヘッケ代数のブロック代数の表現型を決定するとともに有限表現型のブロック代数の構造を決定したことが今回の研究課題で得られた主たる研究成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Susumu Ariki,

Representation type for block algebras of Hecke algebras of classical type,

Adv. Math. 査読有, 317, 2017,

823-845.

Susumu Ariki, Ryoichi Kase, Kengo Miyamoto,

On components of stable Auslander-Reiten quivers that contain Heller lattices: the case of truncated polynomial rings,

Nagoya Math. J. 査読有, 228, 2017,

72-113.

Susumu Ariki, Euiyong Park,

Representation type of finite quiver Hecke algebras of type $D^{(2)}_{l+1}$,

Trans. Amer. Math. Soc. 査読有, 368, 2016,

3211-3242.

Susumu Ariki, Euiyong Park,

Representation type of finite quiver Hecke algebras of type $C^{(1)}_l$,

Osaka J. Math. 査読有, 53, 2016,

463-488.

Susumu Ariki, Kazuto Iijima, Euiyong Park,

Representation type of finite quiver Hecke algebras of type $A^{(1)}_l$ for arbitrary

parameters, IMRN2015, 査読有, 2015,

6070-6135.

(学会発表) (計7件)

Susumu Ariki,

On block algebras of Hecke algebras of classical type, Representation Theory of Symmetric Groups and Related Algebras, 2017.12.20, Singapore (Singapore)

Susumu Ariki,

Block algebras of Hecke algebras of classical type, Conference on Algebraic Representation Theory, 2017.11.24, Shanghai (P.R.China)

Susumu Ariki,

Representation type for block algebras of Hecke algebras of classical type, Conference on Algebraic Representation Theory,

2016.12.04, Shenzhen(P.R.China)

Susumu Ariki,

Heller lattices and AR quivers, International Conference for KMS 70th Anniversary,

2016.10.22, Seoul (Korea)

Susumu Ariki,

Representation type for block algebras of Hecke algebras, Geometric Representation Theory,

2016.10.14, 京都大学(京都府)

Susumu Ariki,

Rouquier ' s theory of quasi-hereditary covers I, II, Summer School on Quasi-hereditary Algebras,

2016.8.29, 8.30,大阪府立大学(大阪府)

Susumu Ariki,

Combinatorics of Hecke algebras,

FPSAC2015, 2015.7.10, Daejeon(Korea)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

有木 進 (ARIKI, Susumu)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：4 0 2 1 2 6 4 1

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

()

研究者番号：

(4)研究協力者

()