様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１７５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４７８６

研究課題名（和文）指数型不定方程式の整数解の研究

研究課題名（英文）Study on integer solutions of exponential Diophantine equations

研究代表者
寺井　伸浩（Terai, Nobuhiro）

大分大学・理工学部・教授

研究者番号：００２３６９７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は次の3つの指数型不定方程式の整数解をいくつかの条件の下で決定することである: (1) a＾x + b＾y = c＾z, (2) (pm＾2 + 1)＾x + (qm＾2 - 1)＾y = (rm)＾z ただし，p,q,rはp+q=r＾2, (3) (a＾φ(m)-1)/m = x＾l ここで，φ はEulerの関数である．我々の方法は初等的方法，Baker理論，楕円曲線やmodular formsの理論から導かれる一般化されたFermat方程式に関する深い結果を用いることである．

研究成果の概要（英文）：Our purpose of this research is to determine integer solutions of exponential Diophantine equations (1) a＾x + b＾y = c＾z, (2) (pm＾2 + 1)＾x + (qm＾2 - 1)＾y = (rm)＾z with p+q=r＾2 (3) (a＾φ(m)-1)/m = x＾l, where φ is Euler's totient function, under some conditions. Our method is based on elementary methods, Baker's method and deep results on generalized Fermat equations via sophisticated arguments in the theory of elliptic curves and modular forms.

研究分野：整数論

キーワード：指数型不定方程式　整数解　Jesmanowicz予想　Terai予想　Baker理論　一般化されたFermat方程式　楕円曲線

１．研究開始当初の背景

(1) a,b,c を互いに素な固定された正の整数とする．このとき，指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ (*) の正の整数解 x,y,z を考える．Mahler は，Thue-Siegel の方法を用いて，(*) が高々有限個であることを示した．また，Hirata-Kohno は，(a,b,c のある仮定のもとで) 指数型不定方程式 (*) の解 x,y,z の大きさの "effective" な上界を与えた．研究代表者は，解の大きさの評価より，解の決定に大いに興味をもつ．(*)の解を決定することは一般には難しいが，ある特別な a,b,c に対しては，解を決定できる場合がある．この話題で有名な予想が2 つある．ポーランドの有名な数学者の Sierpinski の弟子である Jesmanowicz は，1955 年，(*) に関連して，次のような指数型不定方程式に関する予想を提起した．

Jesmanowicz予想: a,b,c を互いに素な正の整数とする．このとき，指数型不定方程式 (*) はただ一つの正の整数解解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ をもつ．

このJesmanowicz予想はピタゴラス数 a,b,c がいろいろな場合に部分的に確かめられているが，不定方程式論では有名な未解決問題の一つである．この予想の一般化として，研究代表者は1994 年(Proc. Japan Acad.)と1999 年(Acta Arith.)に，a,b,c のいくつかの組みの例外を除けば，(*)は高々一つの解 x,y,z を持つことを提起した(Terai予想)．Jesmanowicz予想は，Terai予想の特別な場合である．Terai予想は多くの場合に正しいことが確かめられているが，まだ完全には示されておらず，不定方程式論における未解決問題の一つである．本研究では，$a^2+b^2=c^2$ や $a+b=c^2$ の興味深い場合にTerai予想が正しいことを示したい．

(2) p を奇素数とし，a を p と互いに素な正の整数とする．このとき，Fermat の小定理より $q_p(a)$ は正の整数である．この $q_p(a)$ を a を底とするFermat 商という．整数論においてFermat商 $q_p(a)$ は重要で興味深い数である．例えば，Wieferich は1909 年にFermat 予想の第一の場合が正しくないならば $q_p(2) \equiv 0 \pmod p$ が成り立つこと，さらに続いて Mirimanoff は $q_p(3) \equiv 0 \pmod p$ を示した．Lucas は，$q_p(2)$ が平方数となるのは $p = 3,7$ に限ることを証明した．研究代表者は，1989 年このLucas の定理を一般化するために，不定方程式 $q_p(m) = x^l$ $(l \geqq 2)$ が解 (p,m,x,l) を持つかどうかを考察し，ある条件の下でこの方程式の整数解を決定した．この結果をEuler商 $E_m(a)= (a^{\varphi(m)}-1)/m=x^l$ へ拡張したい．ここで，m は a と互いに素な正の整数で，$\varphi(m)$ はEuler の関数である．ある形の特徴的な整数がいつ冪となるかは整数論ではよくある深い問題である．

２．研究の目的

整数係数の方程式の整数解や有理数解を求めることを不定方程式またはディオファンタス方程式を解くという．ある3つのタイプの指数型不定方程式の正の整数解をいくつかの条件の下で決定することが本研究の目的である．以下に目的を具体的に記す．

(1) a,b,c を正の整数とする．このとき，指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ の正の整数解 x,y,z を決定する．

(2) 指数型不定方程式 $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$ の正の整数解 x,m,n を決定する．ただし，p,q,r は $p+q=r^2$ を満たす正の整数である．

(3) 指数型不定方程式 $(a^{\varphi(m)}-1)/m =x^l$ の正の整数解 a,m,x,l を決定する．ただし，φ は Euler の関数である．

３．研究の方法

(1) Jesmanowicz はピタゴラス数に関する不定方程式 $(m^2-n^2)^x + (2mn)^y = (m^2 + n^2)^z$ は，ただ一つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$ を持つことを予想した．2014年(J. Number Theory)の論文において 、研究代表者は，$n=2$ のときJesmanowicz 予想が成り立つことを証明した．この結果を $n\equiv 2 \pmod 4$ のとき，次のように拡張したい:

(i) $n/2$ が奇素数のべき，(ii) $n/2$ が mod 8 で 1 と合同となる素因数を持たない (iii) $n/2$ が平方数．そのためには，2014年の論文において駆使した，Jacobi 記号の計算を精密化し，$(2/m+n)=-1$，$(m_0/m+n)=-1$ ，を巧妙に示し，矛盾を導く必要がある．ここで，m_0:m のある素因数，(*/*): Jacobi記号である．上の(i)～(iii)の仮定は $y>1$ の場合に用いる．$y=1$ の場合には最初の方程式は Pillai 方程式 $(m^2 + n^2)^z - (m^2-n^2)^x =2mn$ となるので，これは通常のBaker 理論より容易に扱える．つまり，linear form(一次形式) $\Lambda=z\log(m^2+n^2)c - x\log(m^2-n^2)$ を作り，$\log |\Lambda|$ の下からの評価を，特に，最近のLaurent による，二つの代数的数の対数の一次形式の絶対値の下からの非常によい評価を応用することにより，方程式の解 x の上界が得られる．この上界を導くときに，$m>72n$ n の仮定が必要になる．解 x の下界は初等的方法で得られ，x のこれらの上界，下界を組み合わせることにより矛盾に至ることを示す．

(2) 2012年(Int. J Algebra)の論文において研究代表者は，指数型不定方程式 $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$ は，$m\neq 3 \pmod 6$ のとき整数解 $(x,y,z)=(1,1,2)$ だけを持つことを示した．そのあと，BertokとSu-Liに

よりこの条件は除外され,方程式は完全に解かれた．この結果を指数型不定方程式$(pm^2+1)^x + (qm^2-1)^y=(rm)^z$ へ拡張したい．ただし，p,q,rは$p+q=r^2$を満たす正の整数である．小さいp，qの値やｑ,rがpで表される場合に，mに関するある条件の下で,この指数型不定方程式がただ一つの正の整数解x,y,z)=(1,1,2) を持つことを示したい.もっと一般に，指数型不定方程式$a^x+b^y = c^z$(ただし$a+b=c^2$)についても自明な解以外に解を持つかどうかをMagmaで実験し，いろいろな場合に解を決定したい．

(3) mをaと互いに素な正の整数とし，Euler商$E_m(a)$を$E_m(a)= (a^{\phi(m)}-1)/m$ で定義する．Eulerの定理より，$E_m(a)$は整数である．mが素数のとき，$E_m(a)$はFermat商$q_m(a)$と等しい．1989年(Comptes Rend. Canada)，1990年(Tokyo J Math)の論文において，研究代表者は指数型不定方程式$q_p(a)=x^l$ を考察した．本研究では，この方程式を一般化して，指数型不定方程式 $E_m(a)=x^l$ $(x,l\geqq 2)$ (E)を研究したい.$(l,m)=(2,3),(2,6)$のときは，不定方程式(E)はそれぞれ，$a^2-3x^2=1$,$a^2-6x^2=1$ となる．これらは，Pell 方程式なので無数に整数解をもつ．よって，以後,$(l,m)=(2,3)$，$(2,6)$のときは“exceptional cases”として除外することにする．計算機で数値実験をしてみると，不定方程式(E)の整数解(a,m,x,l)について次が予想される．
予想：不定方程式(E)のすべての整数解は，$(a,m,x,l) = (2,7,3,2),(3,5,4,2),(3,10,2,3),(5,3,2,3),(7,6,2,3)$で与えられる．
mが合成数のときの解は$(a,m,x,l) = (3,10,2,3)$，$(7,6,2,3)$だけである．Catalan方程式$x^m-y^n=1$，最先端の楕円曲線やmodular form の理論から導かれる$x^l\pm 1=2y^l$ に関するBennettの結果を用いることにより，(E)の整数解(a,m,x,l)をある条件の下で決定する．

４．研究成果

(1) ①Jesmanowicz は指数型不定方程式$(m^2-n^2)^x + (2mn)^y = (m^2 + n^2)^z$は，ただ一つの正の整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$を持つことを予想した．次の3つの条件の少なくとも一つが成りたつとき、Jesmanowicz 予想が成り立つことを証明できた：
(i)n/2 が奇素数のべき，(ii)n/2 がmod 8 で1 と合同となる素因数を持たない，(iii)n/2が平方数．その証明は、Jacobi 記号の巧妙な計算、Baker理論,一般化されたFermat方程式の深い結果による．主定理の系として，n/2でn<100のときJesmanowicz予想が成り立つことを得る．この結果に関する論文が2015年，Acta Math. Hungarから出版された.今後は，$n = 3,4,5,7,8,9$ や $n\equiv 0 \pmod 4$ のときJesmanowicz 予想が成り立つことを示すのを目標とする．

②$l\equiv 3 \pmod 8$である素数とし，a,b,c を$\gcd(a,lb)=1$，$a^2 +lb^2 = c$ を満たす正の整数とする．そのとき,指数型不定方程式$a^x +lb^y = c^z$ がただ一つの正の整数解$(x,y,z) = (2,2,1)$を持つことをいくつかの条件の下で示すことができた.その証明はLaurent による二つの対数の linear formsに対する下からの評価を用いる.この主結果の系として，固定された$l\equiv 3 \pmod 8$に対し，条件を満たすa,b,cが無数に存在ることが分かる.この結果に関する論文は2016年，Int. J. Algebraから出版された.また.これらの話題については，「指数型不定方程式$a^x+lb^y=c^z$ について」という題目で第136回日本数学会九州支部例会(於 福岡教育大学)において講演した．今後は、$l\neq 3 \pmod 8$のときに不定方程式 $a^x +lb^y = c^z$ を解きたい．そのためには，4 次不定方程式$X^4-lY^4=Z^2$を解かなければならない．

(2) ①Terai-Bertok-Su-Li により，指数型不定方程式 $(4m^2 + 1)^x + (5m^2 - 1)^y = (3m)^z$ はただ一つの整数解$(x,y,z)=(1,1,2)$を持つことが,m に関する条件なしに完全に示された．研究代表者は、指数型不定方程式$(12m^2 + 1)^x + (13m^2-1)^y = (5m)^z$がただ一つの整数解$(x,y,z)=(1,1,2)$を持つことを,mに関するある条件$m \neq 17, 33 \pmod{40}$の下で示した.この結果に関する論文が 2015年,Int. J. Algebraから出版された.今後は,平方剰余相互法則，Baker 理論，楕円曲線論を用いて，m に関する条件を外せるように取り組みたい．

②不定方程式 $(3pm^2-1)^x+(p(p-3)m^2+1)^y=(pm)^z$ に関する論文が Period. Math. Hungar. から出版された．この論文の主結果は，m，p に関するいくつかの条件の下で，上記方程式がただ一つの正の整数解$(x,y,z)=(1,1,2)$ を持つことを示したことである.その証明はよく知られたcongruence methodや 二つの対数のlinear formsの評価に関するLaurentの定理とBugeaudの定理による．これらの話題については、2017 年8 月に「On the exponential Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$」という題目で第11 回福岡数論研究集会において講演した．今後は，もっと一般的な不定方程式 $(pm^2+1)^x + (qm^2-1)^y=(rm)^z$ (ただし $p+q=r^2$)や$m^x + ((r-1)m^2-1)^y = (rm^2-1)^z$がそれぞれ自明な解x,y,z)=(1,1,2),(2,1,1)だけを持つことを示したい．そのためには、Lucas数列のPrimitive divisor に関するいわゆる“BHVの定理”や一般化されたFermat方程式に関する種々の結果を用いる必要がある．

(3) 1989 年(Comptes Rend. Canada)，1990年(Tokyo J Math)の論文において，研究代表者はFermat 商$q_m(a)$に関する指数型不定方程式 $q_p(a)=x^l$ を考察した．この方程式を

一般化して、Euler 商 $E_m(a)$に関する指数型不定方程式 $E_m(a)=x^l$ $(x,l\geqq 2)$ (E)の整数解(a,m,x,l)を研究した．まず，整数論計算ソフト Magma による数値実験から，(E)のすべての整数解は，$(l,m) = (2,3),(2,6)$を除けば，$(a,m,x,l)=(2,7,3,2),(3,5,4,2),(3,10,2,3),(5,3,2,3),(7,6,2,3)$で与えられると予想できる．上記の解で$(m,l)= (3,3),(6,3),(10,3)$ のときは，Magma により楕円曲線の整数点から導かれるのがすぐに分かる．Catalan 方程式 $x^m-y^n=1$，最先端の楕円曲線や modular form の理論から導かれる $x^l\pm 1=2y^l$ に関する Bennett の結果を用いることにより，$m \neq p^k$，$m \neq 2p^k$(ここで p は奇素数、k は正の整数) のとき，この予想が成り立つことを証明できた．この結果に関する論文が 2015 年，Bull. Australian Math. Soc.から出版された．また，これらの話題については,「Euler 商に関する指数型不定方程式について」という題目で第 10 回福岡数論研究集会(於 九州大学)において講演した． $m = p^k$，$m = 2p^k$ のとき(E)は Thue 程式 $U^l-p2^{(l-2)}V^l=\pm 1$,または $pU^l-2^{(l-2)}V^l=\pm 1$ に帰着されるので，今後はこれらの Thue 方程式の解決に取り組みたい．

(4) この3年間,次の3つの整数論研究集会を代表世話人として開催した：①「2015大分整数論研究集会」(2015年9月1日～3日 於ホルトホール大分) ②「2016大分整数論研究集会」(2016年10月8日～9日 於ホルトホール大分) ③「2017大分熊本整数論研究集会」(2017年10月7日～8日 於くまもと県民交流館パレア)．多重ゼーター関数，解析的整数論，代数的整数論，数論幾何学，数学史に関する素晴らしい講演が行われ，若い大学院生を含めて多くの整数論の専門家の参加があった．毎年，各講演について活発な質疑応答があり，大いに刺激を受け，整数論の研究者と有意義な意見交換ができ，今後の課題についてもいろいろ議論できる貴重な機会であった．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①Nobuhiro Terai, Takeshi Hibino,
On the exponential Diophantine equation $(3pm^2-1)^x+(p(p-3)m^2+1)^y=(pm)^z$,
Period. Math. Hungar., 査読有, 74(2017), pp.227-234.
DOI: 10.1007/s10998-016-0162-z

②Nobuhiro Terai, Takeshi Hibino,
On the exponential Diophantine equation $a^x+lb^y=c^z$, Int. J. Algebra, 査読有, 10(2016), pp.393-403.
DOI: 10.12988/ija.2016.6747

③Takafumi Miyazaki, Nobuhiro Terai,
On Jesmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triples Ⅱ,
Acta Math. Hungar., 査読有, 147(2015), pp.286-293.
DOI: 10.1007/s10474-015-0552-3

④Nobuhiro Terai, Takeshi Hibino,
On the exponential Diophantine equation $(12m^2 + 1)^x + (13m^2-1)^y = (5m)^z$,
Int. J. Algebra, 査読有, 9(2015), pp.261-272.
DOI: 10.12988/ija.2015.5529

⑤Nobuhiro Terai,
On exponential Diophantine equations containing the Euler quotient,
Bull. Australian Math. Soc., 査読有, 91(2015), pp.11-18.
DOI: 10.1017/S0004972714000719

〔学会発表〕（計 10 件）

①Nobuhiro Terai,
一般化された Ramanujan-Nagell 方程式 $x^2+(2c-1)^m=c^n$ について，第 138 回日本数学会九州支部例会，2018 年 2 月 17 日，九州工業大学飯塚キャンパス(福岡県・飯塚市)

②Nobuhiro Terai,
On the exponential Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$，第 11 回福岡数論研究集会，2017 年 8 年 9 日，九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)

③Nobuhiro Terai,
指数型不定方程式 $a^x+lb^y=c^z$ について，第 136 回日本数学会九州支部例会，2017 年 2 月 18 日，福岡教育大学(福岡県・福岡市)

④Nobuhiro Terai,
指数型不定方程式 $a^x + 3b^y = c^z$ について，第 135 回日本数学会九州支部例会，2016 年 10 月 22 日，長崎大学(長崎県・長崎市)

⑤Nobuhiro Terai,
Euler 商に関する指数型不定方程式について，第 10 回福岡数論研究集会，2016 年 8 月 9 日，九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)

⑥Nobuhiro Terai,
指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ の解の個数について，愛知数論セミナー，2016 年 5 月 21 日，愛知工業大学 本山キャンパス(愛知県・名古屋市)

⑦Nobuhiro Terai,
On the exponential Diophantine equation

a^x+b^y=c^z with a+b=c^2，第 134 回日本数学会九州支部例会，2016 年 2 月 13 日，九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)

⑧Nobuhiro Terai，
指数型不定方程式に関する Jesmanowicz 予想の一般化について，第 133 回日本数学会九州支部例会，2015 年 10 月 24 日，佐賀大学(佐賀県・佐賀市)

⑨Nobuhiro Terai，
指数型不定方程式 a^x+b^y=c^z について，北陸数論セミナー，2015 年 9 月 17 日，金沢大学(石川県・金沢市)

⑩Nobuhiro Terai，
指数型不定方程式(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y =(rm)^z について，早稲田大学整数論セミナー，2015 年 5 月 15 日，早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都・新宿区)

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
寺井　伸浩（TERAI，Nobuhiro）
大分大学・理工学部・教授
研究者番号：00236978