

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04788

研究課題名(和文) 多変数のゼータ関数の数論的性質の研究

研究課題名(英文) Research on number theoretic properties of zeta functions in several variables

研究代表者

津村 博文 (TSUMURA, Hirofumi)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：20310419

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、ゼータ関数という、整数論の研究において非常に重要な関数の性質について研究することを目的とした。とくに本研究課題においては、多変数のゼータ関数について、主にその解析的側面からの研究を行った。主な結果としては、Witten の仕事をベースに定義されたWittenゼータ関数の多変数化したもの、また荒川恒男氏および金子昌信氏によって定義されたArakawa-Kanekoゼータ関数とよばれるものについて、その数論的な性質を考察し、それまで知られていなかった性質などについて成果を得た。

研究成果の概要(英文)：The main aim in this research is to study what is called the zeta function which plays an important role in number theory and investigate their properties. In particular, we studied zeta functions in several variables mainly from the viewpoint of the analytic aspect. We studied the Witten zeta function in several variables which was defined based on Witten's work, and also the Arakawa-Kaneko zeta function defined by Tsuneo Arakawa and Masanobu Kaneko. Our main result is consider the number theoretic properties of these zeta functions, and consequently we obtained unknown properties of them and gave new results.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

多変数のゼータ関数について、とくに多重ゼータ関数、多変数 Witten ゼータ関数、多重 Arakawa-Kaneko ゼータ関数などについての数論的性質を調べることや、 p 進多重 L 関数の構成などが興味深い問題となっていた。とくにこれらの関数の解析接続、特異点の研究、これらの満たす関係式や、特殊値の導出、さらにはその数論的性質を調べることが重要な点と考えられていた。

2. 研究の目的

(1) 多重ゼータ関数、多変数 Witten ゼータ関数については、負の整数点が不確定特異点になるということが知られており、1変数関数の場合と異なり、その数論的性質を調べることが重要な目的であった。また既知の Witten volume formula と呼ばれる公式を一般化すること、さらにはそれが連続的な関数関係式に拡張できるか、また正の整数点での特殊値の導出等が重要な目的である。

(2) 代数的整数論、とくに岩澤理論において非常に重要な役割を果たす p 進 L 関数の多重化は重要な研究テーマであった。とくに p 進多重ポリログとの関係はよくわかっておらず、その関係性を調べることは重要な研究目的である。

(3) 多重ゼータ値の研究で重要な役割を果たす Arakawa-Kaneko ゼータ関数の研究は活発だが、いくつかの未解決問題に関してはこのところ研究が進んでいなかった。これらの問題に取り組むことは重要な研究目的である。

3. 研究の方法

(1) これまで知られている方法とは異なり、ゼータ関数の積分表示を通じた特異点解消という方法を用いて、多重ゼータ関数、多変数 Witten ゼータ関数の不確定特異点を自然な形で解消することに成功した。これは他の多変数ゼータ関数にも適用することができて、この分野の研究の新たな道具となると考えられる。

(2) p 進多重積分を用いて、 p 進多重 L 関数を構成した。さらにその負の整数点に現れるベルヌーイ数の多重化について、古典的なクンマー合同式の多重化を p 進解析的手法によって自然に示し、その p 進補間関数としての解釈を与えた。

(3) 多重ゼータ値を正の整数点でとるような Arakawa-Kaneko ゼータ関数に対し、それと対をなすような、多重ゼータスター値を正の整数点でとるようなゼータ関数を与えた。これは多重ポリログの解析接続を通して定義されるもので、これまでには定義できなかったものであり、この関数を通して、未解決問題解決の糸口が与えられた。

4. 研究成果

(1) 連携研究者の古庄氏、小森氏、松本氏

とともに、多重ゼータ関数の特異点解消に関して画期的な成果をあげ、その結果が下記の文献[4]として出版された。これまでの多重ゼータ関数の数論的性質の研究で障害となっていた特異点がなくなり、全空間で正則な多重ゼータ関数を構成することができた。これは最初によく知られた Euler 型の多重ゼータ関数について証明されたが、同様な手法を用いて、多変数 Witten ゼータ関数についても証明することができた。この結果も RIMS Kokyuroku Bassatsu に掲載が決定している。これらの結果を受けて、既に知られている Manchon、Paycha らによる正規化多重ゼータ値との関係についても新たな研究が始まっており、今後の進展が期待される。今後の課題としては、これらの間の関数としての関係が明示的に求められることが望ましいと考えられる。

(2) 連携研究者の古庄氏、小森氏、松本氏とともに、 p 進多重 L 関数の構成および p 進多重ポリログとの関係に関して画期的な成果をあげ、その結果が下記の文献[6]として出版された。それまでに、 p 進多重ポリログという、ゼータ関数の正の整数点での p 進類似と、 p 進 L 関数という、ゼータ関数の負の整数点での p 進類似について、それらの関係は明確でなかったが、この結果を通して、それらが連続的につながっていることがわかり、大きな進展が得られた。実際に、これまでに知られている Coleman による Kubota-Leopold p 進 L 関数と p 進ポリログの関係の多重化にあたる結果も証明することができ、その意味付けが明確となった。さらには多重 Stickelberger 元による p 進多重 L 関数の構成も得られているため、今後、岩澤理論で重要な役割を果たす p 進円単数などとの関係も視野に入ってきている。

(3) この 20 年に渡って研究されていた 2 種類のポリベルヌーイ数と、その一方の補間関数である Arakawa-Kaneko ゼータ関数に対し、もう一方のポリベルヌーイ数の補間関数としてのゼータ関数が、金子昌信氏との共同研究を通して構成できた。これは既知の Arakawa-Kaneko ゼータ関数と対をなすものであると考えられる。これにより、この分野の研究の見通しが良くなり、未解決であった Arakawa-Kaneko ゼータ関数に関する問題について、そのいくつかに肯定的な解答を与えることができた。またポリベルヌーイ数の双対定理と呼ばれる関係についても、その連続的な補間としての解釈が可能になった。これらの結果は下記の文献[3]として電子出版された。その文献内の予想を受けて、山本修司氏がある種の関数等式を与えた。その結果を踏まえることで、研究代表者と小森氏との共同研究により、複素成分の一般線形群に付随する形での、一般化 Arakawa-Kaneko ゼータ関数の構成に成功した。この関数は解析的な性質を一般的に取り扱うことが非常に難しく、いろいろな積分表示を経由してその解析

的な性質を導いた。これらの結果は下記の文献[2]として出版された。この結果の応用として、ポリベルヌーイ数の双対定理も非常に一般的な形で拡張することに成功したのが大きな成果と言える。

(4) 多重 Eisenstein 級数については、マックスプランク数学研究所の H. Bachmann 氏との共同研究を通して、新たな関係式を導き、その特殊値に関する明示公式を与えた。これはそれまでの研究代表者が行ってきた研究の自然な多重化とみられる。この結果は下記の文献[5]として出版された。

(5) 双曲線関数を含むような Eisenstein 型二重級数について、古典的なテータ関数の変換公式を通して、新たな関係式を求めることができた。実際、この二重級数の値は、Eisenstein 級数、Dirichlet L 関数、テータ関数の値を用いて明示的に記述されることがわかった。具体的なパラメータに対し、特殊値の例として、円周率やレムニスケート定数などを用いた表示式なども得られている。この結果は下記の文献[1]として出版された。

(6) 前科研費研究課題から継続的に行っている多変数の Witten ゼータ関数の性質に関して、下記の文献[7][9]が出版された。また超平面配置に付随する多重級数の値に関する結果が下記の文献[8]として出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 9 件)

[1] H. Tsumura, Double series identities arising from Jacobi's identity of the theta function, *Results Math.* 73 (2018), Art. 10, 1-12.

doi: 10.1007/s00025-018-0770-4

[2] Y. Komori and H. Tsumura, On Arakawa-Kaneko zeta-functions associated with $GL_2(\mathbb{C})$ and their functional relations, *J. Math. Soc. Japan* 70 (2018), 179-213.

doi: 10.2969/jmsj/07017501

[3] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* published online (2017)

doi: 10.1017/nmj.2017.16.

[4] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of complex multiple zeta-functions, *Amer. J. Math.* 139 (2017), 147-173.

doi: 10.1353/ajm.2017.0002

[5] H. Bachmann and H. Tsumura, On multiple series of Eisenstein type, *Ramanujan J.* 42 (2017), 479-489.

doi: 10.1007/s11139-015-9738-0

[6] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Fundamentals of p-adic multiple L-functions, and evaluation of

their special values, *Selecta Math.* 23 (2017), 39-100.

doi: 10.1007/s00029-016-0233-2

[7] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, *Siauliai Math. Semin.*, 10 (18) (2015), 149-179.

http://siauliaiims.su.lt/pdfai/2015/kom_mat_tsu_2015.pdf

[8] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Infinite series involving hyperbolic functions, *Lith. Math. J.* 55 (2015), 102-118.

doi: 10.1007/s10986-015-9268-x

[9] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras \mathfrak{V} , *Glasgow Math. J.* 57 (2015), 107-130.

doi: 10.1017/S0017089514000160

〔学会発表〕(計 4 件)

津村 博文, テータ関数の変換公式から導かれるいくつかの無限級数の値について, 群大桐生数論セミナー, 群馬大学桐生キャンパス(桐生市), 2017年12月.

津村 博文, 多重ベルヌーイ数に関する最近の話題, 大分整数論研究集会, サテライトキャンパスおおいた(大分市), 2016年10月.

津村 博文, 多重ベルヌーイ多項式の値の和に関する双対公式とその関連の話題, 第31回多重ゼータ研究会, 京都産業大学(京都市), 2016年9月.

Hirofumi Tsumura, Desingularization of complex multiple zeta-functions and construction of p-adic multiple L-functions, Japanese-French Conference on Zeta Functions of Several Variables and Applications, 名古屋大学(名古屋市), 2015年11月.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.tmu.ac.jp/stafflist/data/ta/635.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津村 博文 (TSUMURA, Hirofumi)

首都大学東京大学院・理工学研究科・数理情報科学専攻・教授

研究者番号: 20310419

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

松本 耕二 (MATSUMOTO, Kohji)

名古屋大学大学院・多元数理科学研究
科・教授

研究者番号：60192754

小森 靖 (KOMORI, Yasushi)

立教大学・理学部・数学科・教授

研究者番号：80343200

古庄 英和 (FURUSHO, Hidekazu)

名古屋大学大学院・多元数理科学研究
科・准教授

研究者番号：60377976

(4)研究協力者

なし