

平成 30 年 6 月 16 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04790

研究課題名(和文)代数解析的手法による幾何学的表現論の研究

研究課題名(英文) Research on the geometric representation theory using algebraic analysis

研究代表者

谷崎 俊之 (Tanisaki, Toshiyuki)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70142916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ベキ根における量子群の表現論を中心に、いくつかの成果が得られた。最も重要な目標は、ベキ根における量子群に対して Beilinson-Bernstein 型対応を確立する事であったが、この問題に関しては最終的解決には至っていない。ただし A 型量子群に関しては証明ができた。これは大きな進展である。また偶数乗根における量子群の表現論と関連して $q=-1$ における量子群を考え、これがリー多重超代数の包絡代数となることを見いだした。なお、量子座標環・アフィンヘッケ環に関しても研究を行ったが、特筆すべき成果は得られなかった。

研究成果の概要(英文)：I obtained several results concerning the representation theory of quantum groups at roots of 1. The most important aim was to establish the Beilinson-Bernstein type correspondence for quantum groups at roots of 1. The problem is not yet solved in its full generality, but I have established it for the quantum groups of type A. This is a big progress. In connection with the quantum groups at even roots of 1, I also considered the quantum groups at $q=-1$ and proved that it is isomorphic to the enveloping algebra of a Lie multi-super algebra. I investigated also the quantized coordinate algebras and affine Hecke algebras, but obtained no remarkable results on them.

研究分野：代数群と量子群の表現論

キーワード：代数解析 代数群 量子群 表現

1. 研究開始当初の背景

- (1) 正標数における簡約代数群の表現論とベキ根における量子群の表現論の類似に鑑み、比較的先行している代数群の表現論をモデルとして、ベキ根における量子群の表現論を展開することは喫緊の課題であった。
- (2) 国場・尾角・山田は量子座標環の表現論において新たな視点を導入し、新しい研究方向を打ち出したところであり、この方向でのさらなる研究が期待されていた。
- (3) アフィン・ヘッケ代数の表現論の幾何学的研究は 1980 年代に活発に行われたテーマであるが、近年の幾何学的表現論の進展により、さらなる展開の可能性がみえてきたところであった。

2. 研究の目的

幾何学的手法により、以下の問題に関して成果を挙げることを目指す。

- (1) ベキ根における量子群の表現論の展開。特に Beilinson-Bernstein 型対応を確立する。また偶数乗根における量子群を含めた一般論を構築する。
- (2) 量子座標環の表現論の展開。特に圏化の理論の構築。
- (3) アフィンヘッケ環の同変 K 群を用いた実現における Kazhdan-Lusztig 基底の幾何学的意味づけを与える。

3. 研究の方法

幾何学的手法、特に代数解析的手法による研究を推進する。なお、最も重要な研究対象であるところのベキ根における量子群の表現論は、正標数における簡約代数群の表現論に類似している。日本では、正標数における簡約代数群の表現論の研究者は少ないが、分担者の兼田正治はその一人であり、分担者と共同で研究にあたることで、多大のメリットが期待される。

4. 研究成果

「研究の目的」で述べた問題(1),(2),(3)のうち(1)に関してはある程度の成果があったが、(2),(3)に関しては特筆すべき進展はなかった。

(1)で最も重要なのは Beilinson-Bernstein 型対応の確立であるが、これについては A 型のみではあるが、証明が完了した。これと、以前の研究代表者の結果をあわせると、奇数乗根における A 型量子群に対して、中心指標を決めるごとに、その中心指標をもつ既約表現の数を与える Lusztig の予想の証明が得られた事になる。この証明を A 型以外に拡張するのが今後の課題である。

量子群の表現論に関してはそれ以外にもいくつか進展があった。

まず、偶数乗根における量子群の表現論の代数的研究を行った。中心の環構造は、以前の研究代表者の研究により既にわかっているが、その Poisson 積構造まで踏み込んで、研究する必要がある。中心は、 $q=\pm 1$ における量子群と密接に関係している事がわかっており、 $q=1$ の場合は取り扱いが容易であるが、 $q=-1$ における量子群の研究は余りなされていなかった。本研究において $q=-1$ における量子群が、あるリー多重超代数の包絡代数と一致することがわかった。この事実は、偶数乗根における量子群の研究において重要な視点を与えるものと思う。

また、量子群の研究全般において不可欠な役割を演ずる Drinfeld 形式と braid 群に関する研究を行った。特に、Berenstein の予想を証明した。また、その証明にはこれまで長い計算を必要としていたある事実の、短い証明を与えた。

さらに、ベキ根以外での量子群の可積分最高ウェイト加群に対して Weyl-Kac 型指標公式を証明した。また、可積分最高ウェイト加群の圏が、半単純である事を証明した。これは 20 年以上前から予想されていたことで柏原の予想と呼ばれることもあるが、その完全な証明が、はじめて得られた。

ベキ根での量子群の表現論と臨界レベルでのアフィン・リー代数の表現論は密接に関係しており、臨界レベルでのアフィン・リー代数に対応する量子群の表現論も考えてみるべきことである。こちらに関して様々な研究がなされてはいるが、リー代数の場合ほどまとまった理論があるわけではない。そこでまず、臨界レベルでのアフィン・リー代数に対応する量子群の中心の構造について考察を行った。これについては、既に部分的結果は得られているが、完全な記述は得られていないらしい。そこで中心の Harish-Chandra 型同型による記述を試みた。中心からある種の多項式環への写像の定義はできる。問題はその像の決定である。しかしまだ完全な結果は得られていない。

最近、クラスター代数の理論とも関連して、量子群の非可換トーラス代数への埋め込みの構成問題が話題になっている。この問題は、量子座標環の表現論とも密接に関係している。そこで、これを量子旗多様体上の量子微分作用素環を用いて考察した。量子群全体が、そのボレル部分と、ボレル部分の量子座標環のハイゼンベルグ積の中にうめこまれることがわかった。これは埋め込み問題が量子微分作用素環の解析とつながりがあることを示している。

(2)に関しては、テンソル積の分解の計算をある程度行った。その動機は圏化への応用にある。単純ルートに対応する Fock 表現の 2 階のテンソル積の分解がわかると、新たな代数が定まるものと思われる。しかし、いきなりこれを実行するのは容易ではなさそうなので、パラメータ q をベキ根に特殊化した場合に出てくる退化した Fock 表現の 2 階のテンソル積の分解を試みた。退化した Fock 表現は有限次元なので比較的容易に計算がで

きて、分解の記述は得られた。これの圏化への応用が次の課題である。

(3)に関しては残念ながら成果がなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Tanisaki, Toshiyuki; Characters of Integrable Highest Weight Modules over a Quantum Group. Int. Math. Res. Not. 査読有, IMRN 2018, no. 3, 677–698.

Noriyuki, Abe; Kaneda, Masaharu; The Loewy structure of $G_1 T$ -Verma modules of singular highest weights. J. Inst. Math. Jussieu 査読有, 16 (2017), no. 4, 887–898.

Kaneda, Masaharu; Another strongly exceptional collection of coherent sheaves on a Grassmannian. J. Algebra 査読有, 473 (2017), 352–373.

Tanisaki, Toshiyuki; Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases. J. Math. Soc. Japan 査読有, 69 (2017), no. 3, 1105–1156.

Tanisaki, Toshiyuki; Invariance of the Drinfeld pairing of a quantum group. Tokyo J. Math. 査読有, 39 (2017), no. 3, 885–900.

Tanisaki, Toshiyuki; The center of a quantized enveloping algebra at an even root of unity. Osaka J. Math. 査読有, 53 (2016), no. 1, 47–81.

Gros, Michel; Kaneda, Masaharu; Un scindage du morphisme de Frobenius quantique. (French) [Splitting of the quantum Frobenius morphism] Ark. Mat. 査読有, 53 (2015), no. 2, 271–301.

Noriyuki, Abe; Kaneda, Masaharu; Loewy series of parabolically induced $G_1 T$ -Verma modules. J. Inst. Math. Jussieu 査読有, 14 (2015), no. 1, 185–220.

[学会発表](計12件)

谷崎俊之

量子旗多様体と量子群

日本数学会年会 企画特別講演

東京大学 2018.3.21

M. Kaneda

Frobenius contraction, a new operation on the rational modules for reductive algebraic groups in positive characteristic
Atlantic Algebra Center, Canada, 2017.8.28

谷崎俊之

ベキ根における量子群の局所化

弘前 表現論 小研究集会

弘前大学 2017.8.27

谷崎俊之

量子群の指標公式

農工代数学セミナー2017

東京農工大学 小金井キャンパス 2017.3.23

T. Tanisaki

The Drinfeld pairing and the braid group action for a quantized enveloping algebra, Conference on Algebraic Representation Theory

Harbin Institute of Technology, Shenzhen Graduate school, China 2016.12.3

谷崎俊之

量子群の指標公式

稚内 表現論 小研究集会

稚内北星学園大学 2016.8.27

M. Kaneda

Frobenius contraction, as Donkin puts it
Confédération Helvétique
Bernoulli Center EPFL, Switzerland,
2016.8.16

谷崎俊之

量子群のDrinfeld pairingについて

研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 篠田記念号刊行によせて」

上智大学, 2016.3.20

T. Tanisaki

Modules over quantized coordinate algebras and PBW-bases,

Taipei Conference in Representation theory V

Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan, 2016.1.8

T. Tanisaki

Characters of integrable highest weight modules over a quantum group,
Categorical Representation Theory and Combinatorics

KIAS, Seoul, Korea, 2015.12.11

谷崎俊之

偶数乗根での量子群とリー多重超代数

沖縄 表現論 研究小集会

琉球大学理学部 2015.11.7

M. Kaneda

Other aspects of Frobenius splitting
Seminar in the program Representation
Theory
Mittag-Leffler Institute, Djursholm,
Sweden, 2015.5.13

6 . 研究組織

(1)研究代表者

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 70142916

(2)研究分担者

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 60204557