

令和元年6月17日現在

機関番号：32503

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04791

研究課題名(和文) 馴分岐拡大を用いた不分岐岩澤加群の研究

研究課題名(英文) Study of unramified Iwasawa modules by using tamely ramified extensions

研究代表者

伊藤 剛司 (ITO, Tsuyoshi)

千葉工業大学・社会システム科学部・教授

研究者番号：80339689

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：代数体の Z_p 拡大(もしくはmultiple Z_p 拡大)に対する「馴分岐岩澤加群」について研究を行った。特に、これがどのような場合に非自明な有限部分加群を持つか、という問題に対する部分的な結果をいくつか得ることができた。
また、代数体の円分的 Z_p 拡大体上の不分岐(もしくは馴分岐) pro- p 拡大のガロア群の構造についても研究を行った。
加えて、虚2次体上の反円分的 Z_3 拡大の第1中間体上のある種の馴分岐アーベル3拡大のガロア群の構造に関する結果も得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数体の Z_p 拡大(もしくはmultiple Z_p 拡大)上のある種のpro- p 拡大のガロア群の構造に関して、従来は知られていなかった新しい研究成果を得ることができた。特に、 Z_p 拡大の馴分岐岩澤加群の有限部分加群についての成果たちは、今後の研究において重要な役割を果たす可能性がある。また、得られた成果のうちのいくつかは、代数体の「非アーベル岩澤理論」の進展にいくらか寄与するものであると見ることができる。

研究成果の概要(英文)：We studied "tamely ramified Iwasawa modules" for Z_p -extensions (or multiple Z_p -extensions) of algebraic number fields. In particular, we obtained several partial results for the question to when it has a non-trivial finite submodule.
We also studied the structure of the Galois group of unramified (or tamely ramified) pro- p extensions over the cyclotomic Z_p -extension field of an algebraic number field.
In addition, a result concerning the structure of the Galois group of certain tamely ramified abelian 3-extensions over the initial layer of the anti-cyclotomic Z_3 -extension of an imaginary quadratic field was obtained.

研究分野：数論

キーワード：岩澤理論 馴分岐拡大

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数体の Z_p 拡大の岩澤理論における重要な予想の一つとして、総実代数体上の円分的 Z_p 拡大の不分岐岩澤加群に対する「Greenberg 予想」と呼ばれるものがある。この予想は、一般の代数体に対しても、全ての Z_p 拡大を合併して得られる multiple Z_p 拡大の不分岐岩澤加群に対する主張として一般化されている (一般 Greenberg 予想)。本研究課題は、代数体の Z_p 拡大体上 (もしくは multiple Z_p 拡大体上) の「馴分岐拡大」の考察を経由して、一般 Greenberg 予想の解決に迫ることを主な目標として開始された。

2. 研究の目的

本研究の目的は、大まかには以下の3つである。

- (1) 代数体の Z_p 拡大 (または multiple Z_p 拡大) 上の、馴分岐岩澤加群の構造を調べる。
- (2) 代数体の Z_p 拡大 (または multiple Z_p 拡大) 上の、 S 外不分岐最大 pro- p 拡大のガロア群の構造を調べる (ここで、 S は p 上の素点を含まないような有限素点の有限集合)。
- (3) 上記(1), (2)の研究成果を利用して、不分岐岩澤加群の構造についての成果を得る。

3. 研究の方法

本研究はおおむね以下のような方法で行われた。

既存の論文等の内容・研究手法を検討し、我々の問題に適用できるか考察した。

研究集会等に参加して最新の結果を聴講した。また、金沢工業大学において研究集会「野々市代数的整数論 2018」を開催した。

研究代表者と研究分担者で (場合によっては周辺分野の研究者も交えて) 研究打ち合わせを行った。

一部の研究においては、コンピュータによる準備的な計算を行い、どのような現象が起きているかを調べた。また、得られた結果のいくつかについては、コンピュータを用いてそれが成り立つ実例を計算した。

4. 研究成果

「研究の目的」で述べた各項目に対し、以下のような結果を得ることができた。

項目(1)に関しては、「 Z_p 拡大の馴分岐岩澤加群がどのような場合に非自明な有限部分加群を持つか? (multiple Z_p 拡大の場合は、非自明な pseudo-null 部分加群を持つか?)」という問題に着目した。これに関しては、研究分担者 (藤井) と研究代表者との共同研究による「非自明な有限部分加群 (又は pseudo-null 部分加群) を持つための十分条件」に関する結果 (下記「主な発表論文等」における雑誌論文の(3))と、研究代表者による「非自明な有限部分加群 (又は pseudo-null 部分加群) を持たないための十分条件」に関する結果 (雑誌論文の(2)) が得られている。また、項目(1)と幾分か関連する結果として、研究代表者は虚 2 次体上の反円分的 Z_3 拡大の第 1 中間体上の q 外不分岐アーベル 3 拡大のガロア群の構造に関する結果も得ている。

項目(2)に関しては、「代数体の円分的 Z_p 拡大体上の S 外不分岐最大 pro- p 拡大のガロア群は、非アーベルな自由 pro- p 群にはならないのではないか?」という問題を考察の対象とした。この問題自体は、 S が空集合の場合 (即ち、「最大不分岐 pro- p 拡大」) には、既にいくつもの考察が行われており、この場合は常に肯定的であろうと考えられている。研究分担者と研究代表者は、 S が空集合である場合も含めて、この問題とその周辺についての研究を (各々独立に) 行った。特に、雑誌論文の(1)ではこの問題に関連する幾つかの結果が示されている。

項目(3)に関しては、当初予定していた方針に沿った形では、(一般 Greenberg 予想に対しての) 明確な成果は得られなかった。しかし、雑誌論文の(1)におけるいくつかの結果のうちの一つとして、円分的 Z_p 拡大体上の最大 S 外不分岐 pro- p 拡大のガロア群の構造と (総実代数体の) Greenberg 予想とを関連付ける結果が得られている。また、(こちらも研究開始当初の方針に沿った形では無いが)「虚数乗法を持つ楕円曲線の等分点たちから作られる Z_p 拡大」の不分岐岩澤加群を調べる、という研究にも着手した。しかし、これに関しては中途半端な状態のままで期間が終了してしまったため、その後も研究を継続することとした。

上記に加えて、研究分担者は、研究代表者とは異なるアプローチから不分岐岩澤加群や代数体のイデアル類群などについての研究も行った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) Tsuyoshi Itoh :

On the structure of the Galois group of the maximal pro- p extension with restricted ramification over the cyclotomic \mathbb{Z}_p -extension,
Tokyo Journal Mathematics に掲載決定, (査読有).

(2) Tsuyoshi Itoh :

Tamely ramified Iwasawa modules having no non-trivial pseudo-null submodules,
Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, (査読有), **30** (2018), 859--872.
doi:10.5802/jtnb.1053.

(3) Satoshi Fujii, Tsuyoshi Itoh :

Some remarks on pseudo-null submodules of tamely ramified Iwasawa modules,
Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, (査読有), **30** (2018), 533--555.
doi:10.5802/jtnb.1038.

[学会発表](計 18件)

(1) 伊藤剛司,

虚2次体上の反円分的 \mathbb{Z}_3 拡大の中間体上の q 外不分岐なアーベル3拡大について,
早稲田大学整数論研究集会, 2019年.

(2) 伊藤剛司,

虚2次体上の反円分的 \mathbb{Z}_3 拡大の中間体上の q 外不分岐なアーベル3拡大について,
北陸数論セミナー第229回, 2019年.

(3) 藤井俊,

類群問題, Cornell の結果に対する注意,
第17回北陸数論研究集会, 2018年.

(4) 伊藤剛司,

円分的 \mathbb{Z}_p 拡大体上の最大不分岐(または S 外不分岐) pro- p 拡大のガロア群の構造について,
愛知数論セミナー, 2018年.

(5) 藤井俊,

ある虚二次体の円分的 \mathbb{Z}_3 拡大上の最大不分岐 pro-3 ガロワ群の自由性について,
早稲田大学整数論セミナー, 2018年.

(6) 伊藤剛司,

円分的 \mathbb{Z}_p 拡大体上の最大不分岐(または S 外不分岐) pro- p 拡大のガロア群の構造について,
早稲田大学整数論セミナー, 2018年.

(7) 伊藤剛司,

虚2次体の円分的 \mathbb{Z}_3 拡大上の最大不分岐 pro-3 拡大のガロア群の構造についての考察とそこから生じた予想,
新潟代数セミナー, 2018年.

(8) 藤井俊,

ある虚二次体の円分的 \mathbb{Z}_3 拡大上の最大不分岐 pro-3 ガロワ拡大の構造について,
北陸数論セミナー第211回, 2017年.

(9) 藤井俊,

虚二次体上の一般 Greenberg 予想について,
北陸数論セミナー第202回, 2017年.

(10) 伊藤剛司,

非自明な pseudo-null 部分加群を持たない馴分岐岩澤加群に関して,
早稲田大学整数論研究集会, 2017年.

(11) 藤井俊,

p 類体塔と非アーベル岩澤理論における幾つかの問題について,
北陸数論研究集会2016, 2016年.

(12) 伊藤剛司,

非自明な pseudo-null 部分加群を持たない馴分岐岩澤加群に関して(総実代数体上の場合),

愛知数論セミナー，2016年．

(13) 伊藤剛司，
非自明な pseudo-null 部分加群を持たない馴分岐岩澤加群に関して（虚2次体上の場合），
北陸数論セミナー第198回，2016年．

(14) 伊藤剛司，
馴分岐岩澤加群の非自明な pseudo-null 部分加群の存在について（藤井俊氏との共同研究），
2016 大分整数論研究集会，2016年．

(15) 藤井俊，
On Greenberg's generalized conjecture for totally imaginary fields,
Christian Maire 氏を囲んでの小研究集会，2016年．

(16) 伊藤剛司，
On pseudo-null submodules of tamely ramified Iwasawa modules（藤井俊氏との共同研究），
Christian Maire 氏を囲んでの小研究集会，2016年．

(17) 藤井俊，
Some remarks on pseudo-null submodules of tamely ramified Iwasawa modules（千葉工業
大学 伊藤剛司氏との共同研究），
北陸数論セミナー第188回，2016年．

(18) 藤井俊，
non-CM 総虚体の一般 Greenberg 予想に向けて，
北陸数論セミナー第183回，2015年．

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
researchmap
<https://researchmap.jp/read0210406/>

6．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：藤井 俊

ローマ字氏名：(FUJII, Satoshi)

所属研究機関名：島根大学

部局名：学術研究院教育学系

職名：准教授

研究者番号（8桁）：20386618

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。