

令和 3 年 5 月 20 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2020

課題番号：15K04794

研究課題名(和文) クラスタ代数と結晶基底の表現論的研究

研究課題名(英文) Representation theoretical Research on Cluster algebras and crystal bases

研究代表者

中島 俊樹 (Nakashima, Toshiki)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60243193

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：2015年度～2020年度に渡り、クラスタ代数と結晶基底の関係について、単項式表示や多面体表示などを用いて具体的に記述する研究を実施した。

2重Bruhat cell上の座標環を持つクラスタ代数の初期クラスタについて、Demazure 結晶の単項式表示を用いて具体的に記述し、さらに、A型の場合に、Coxeter元からきまる2重Bruhat cell上のクラスタ代数のすべてのクラスタ変数を結晶基底の単項式表示を用いて記述した。クラスタ多様体と呼ばれる幾何学的対象上に幾何結晶の構造を導入することにも研究の方向を広げた。これらの成果については学術誌に掲載済みである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結晶基底と現在、活発に研究が進んでいるクラスタ代数との具体的な関係について明らかにした。まだまだ、わかっていないことが多いが、それだけに新しい発見が期待できる研究であるといえる。とくに、potential と呼ばれる多様体上の関数については有限次元リー代数の場合のみならず、無限次元のKac-Moody リー代数の場合にも構成ができると期待できる成果を得られた。

研究成果の概要(英文)：We studied on the subject of the relation between cluster algebras and crystal bases by using the method of monomial realizations and polyhedral realizations among 2015~2020.

We succeeded in describing the initial cluster of the cluster algebras on double Bruhat cells in terms of monomial realizations of certain Demazure crystals. Moreover, for type A, we also succeeded in describing all cluster variables of the cluster algebras on the double Bruhat cell determined by Coxeter elements. We extend our interest to inducing geometric crystal structure on cluster varieties. All these results have been published in academic journals.

研究分野：代数学、結晶基底、量子群

キーワード：結晶基底 クラスタ代数 幾何結晶 熱帯化 2重Bruhat cell

1. 研究開始当初の背景

結晶基底の理論は1990年頃柏原正樹により創始され、以来量子群の表現論のみならず、位相幾何学、代数群の表現論、組合せ論、数理物理の研究などに大きな影響を及ぼし、今なお活発に研究が推進されている。結晶基底の理論の特色は、古典的ナリー代数の表現論では考えることができない結晶化—つまりパラメーターの q を 0 として考えることにより複雑な現象を単純化し、様々な組合せ論的な記述を可能にしたことにある。

クラスター代数の理論はS.Fomin とA.Zelevinsky により発見され、現在、急速に発展している研究分野である。元来、クラスター代数はupper 大域基底の積表示についての研究から派生したものであった。その出自から、結晶基底とクラスター代数の間になんらかの関連が見出されることは、十分に期待され得るものであったが、ここで、**double Bruhat cell** upper クラスター代数と結晶基底の単項式表示の具体的な関係について、その端緒が発見されることとなった、ここで、 B_{\pm} はリー群 G のボレル部分群、 $u; v$ はワイル群の元である。さて、クラスター代数とは、おおまかに次のようなものである：クラスター変数と呼ばれる変数の組 $x = (x_1, \dots, x_n)$ とある種の条件を満たす整数行列 M の組 $(x; M)$ をシード

(種)と呼び、これらをミューテーションと呼ばれる変換則に従い変換し、そこに現れるすべての変数で生成される代数をクラスター代数と呼ぶ。このクラスター代数が大きく発展してきた背景には、創始者たちの予想を超える広がりがあったことは間違いない。ルート系の理論やリー理論の拡張概念の構築のみならず、有限次代数の表現論、数理物理、WKB解析、Poisson 幾何、圏化などの理論との関係が明らかになるたびに、その重要性が急速に認識されていった。

申請者は前研究課題の研究途上、飾り付き幾何結晶と呼ばれるものの飾り関数が結晶基底の単項式表示により記述できることを示した。その研究において重要な役割を果たしたものが一般化された小行列式(**generalized minor**)である。この**generalized minor**が**double Bruhat cell**上のupper クラスター代数を記述していることが、この研究に結びついている。

2. 研究の目的

過去の研究において、申請者らはA型リー代数の場合に $(u; e)$ タイプの**double Bruhat cell**に対して各クラスター変数の具体的な形と結晶基底の単項式表示との関係を記述した。そこで、まず、A型の場合に、より一般のタイプに対してクラスター変数を具体的に記述し、さらに結晶基底の単項式表示との関係について明らかにしたい。 $(u; e)$ タイプの場合には、長方形ヤング盤に対応する結晶基底のみが現れたが、一般の場合はいくつかの例により、必ずしも長方形の場合だけではないことが予想されている。そこで、 $(u; e)$ タイプの場合にも用いたDemazure 結晶が、その記述に重要な役割を担っていると期待される。このDemazure 結晶はワイル群の情報を持っているので、一般のタイプのクラスター変数の記述には欠くことが出来ないものと考えている。

さらに、A型のみならず所謂古典型のリリー代数、代数群の場合が次なる目標となる。これらは、A型の場合の手法がある程度使えるということと結晶基底の具体的な記述がなされているので、うまく記述できることが期待される。しかし、A型以外の場合にはクラスター変数の具体的な記述以外の自明でない正係数が登場することがいくつかの例からわかってい

る。これらについて、その意味と理由について表現論や幾何学の立場から明らかにすることも研究目標とする。

また、有限型のリー代数、代数群のみならずアフィン型などの無限次元Kac-Moody リー代数の場合も研究の対象としたい。アフィン型の理論には、もともと q -指標などの理論があり、結晶基底の単項式表示との関係も深い。特にtruncateされた q -指標と、クラスター代数はその繋がりが知られている([HL]) ので、truncateされた q -指標と、このDemazure結晶との関係についても考察し、研究目標の1つとする。

3. 研究の方法

既存の結果をふまえ、より一般のタイプの場合のdouble Bruhat cell 上のupper cluster代数に対して、各cluster variable が結晶基底の単項式表示で記述されるかをみるため、多くの具体例を計算する。かなり大きいサイズの行列を計算する必要も出てくると予想されるので、効率的なアルゴリズムを考えていきたい。また、中筋による解析数論の立場から、関連するいくつかの特殊関数についての考察も行いたい。そうした特殊関数とcluster代数、Demazure結晶などとの関連について実験的な計算を実行し、新しい関係を見出す。

4. 研究成果

結晶基底の理論は1990年代に導入され、その後多くの分野と結びつきながら発展した。その中で、S. FominとA. Zelevinskyにより発見されたクラスター代数は現在広く世界中で研究が活発に進展しており、当該研究の主題はこのクラスター代数とその元になった結晶基底の関係について、これまでとは違った視点、つまり、単項式表示や多面体表示などを用いて具体的に記述することにある。

これまで明らかになっているのは2重 Bruhat cell $G(u, e)$ 上の座標環を持つクラスター代数としての構造のうち初期クラスターとよばれるものについて、Demazure結晶の単項式表示を用いて具体的に記述したことである。さらに、金久保有輝とともにA型の場合に、Coxeter元からきまる2重Bruhat cell 上のクラスター代数のすべてのクラスター変数を結晶基底の単項式表示を用いて具体的に記述することにも成功し、学術誌にすでに論文が掲載されている。そこでは、preprojective 代数の加群の圏を用いてadditive categorification という手法が重要な役割を果たした。また、クラスター多様体と呼ばれる幾何学的対象上に幾何結晶の構造を導入することにも研究の方向を広げている。クラスター多様体にはA多様体とX多様体という対になったものが定義されている。この2つのトロピカル 双対についてのFock-Goncharov 予想というものが提示されて、幾何結晶のtropicalizationとの関係が期待されている。こちらについてもすでに学術誌に論文が掲載済みである。最近ではpotential とよばれる多様体上の関数が幾何結晶、結晶基底そしてクラスター代数をつなぐ重要な対象であると認識しその具体的な構成や応用についての研究も行い、現在投稿中である。中筋はゼータ関数を通じて解析数論の立場から研究を遂行して、五味はHecke環の立場から研究を遂行した。。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Toshiki Nakashima, Yuki Kanakubo	4. 巻 149
2. 論文標題 Geometric crystals and Cluster ensembles in Kac-Moody setting	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 103576-103598
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2019.103576	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Toshiki Nakashima, Yuki Kanakubo	4. 巻 538
2. 論文標題 Cluster algebras of finite type via Coxeter elements and Demazure crystals of type A	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 149-206
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnw344	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuki Kanakubo, Toshiki Nakashima	4. 巻 2018
2. 論文標題 Cluster Variables on Double Bruhat Cells $G^{u,e}$ of Classical Groups and Monomial Realizations of Demazure Crystals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 3621-3670
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.03.041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kailash C. Misra, Toshiki Nakashima	4. 巻 507
2. 論文標題 Affine geometric crystal of $A^{(1)}_n$ and limit of Kirillov-Reshetikhin perfect crystals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 249-291
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnw344	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Y.Kanakubo, T.Nakashima	4. 巻 39
2. 論文標題 Explicit forms of cluster variables on double Bruhat cells $G^{u,e}$ of type C	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 643-678
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiki Nakashima(with Y.Kanakubo)	4. 巻 11
2. 論文標題 Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 033, 065
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2015.033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 中筋麻貴	4. 巻 なし
2. 論文標題 Casselman問題へのアプローチ法	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 「第八回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 63, 71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maki Nakasuji(with Hiroshi Naruse)	4. 巻 なし
2. 論文標題 Yang-Baxter basis of Hecke algebra and Casselman's problem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasushi Gomi (with M. Loyola, M. N. De Las Penas)	4. 巻 13
2. 論文標題 String C-groups of order 1024.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contrib. Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhsu Gomi	4. 巻 39
2. 論文標題 Gauss sums on the Iwahori-Hecke algebras of type A.	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Tokyo J. Math.	6. 最初と最後の頁 583-596
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Toshiki Nakashima
2. 発表標題 Half Potentials on Geometric Crystals and Connectedness of Cell Crystals
3. 学会等名 Workshop on Lie Algebras, Their Generalizations and Quantum Analogs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshiki Nakashima
2. 発表標題 Half Potential on Geometric Crystals and the Crystal $B(\)$
3. 学会等名 Workshop on Crystals and Their generalizations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島俊樹
2. 発表標題 Half Potential on Geometric Crystals and the Crystal $B(\)$
3. 学会等名 Workshop on Crystals and Their generalizations, Osaka City University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島俊樹
2. 発表標題 Crystal bases and geometric crystals
3. 学会等名 Workshop on Crystal bases, Cluster algebras, and Poisson Geometry, Hong Kong University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中島俊樹
2. 発表標題 Geometric Crystals on Cluster Varieties
3. 学会等名 The Joint Meeting of China Mathematics Society-American Mathematics Society, Fudan University, Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Nakashima
2. 発表標題 Product Structure on Monomial Realizations of Type A fundamental crystals
3. 学会等名 Seminaire de Theorie des Groupes, Université de Picardie (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T.Nakashima
2. 発表標題 Geometric Crystals on Cluster Varieties
3. 学会等名 S'eminare d'Algebre, Universite Pierre et Marie Curie, (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Nakashima
2. 発表標題 Geometric crystals and cluster varieties
3. 学会等名 Seminaire d'algebre et de g'eom'etrie, Universite caen Normandie (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T.Nakashima
2. 発表標題 Cluster algebras of Finite A Type and Demazure Crystals
3. 学会等名 Seminaire Groupes, Representations et Geometrie, Universite Diderot (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中島 俊樹
2. 発表標題 Affine Geometric Crystal of $A^{(1)}_n$ and Limit of Kirillov-Reshetikhin Perfect Crystals
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中島 俊樹
2. 発表標題 Demazure Crystals and Cluster Algebras
3. 学会等名 Algebra Seminar (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中島 俊樹
2. 発表標題 Affine Geometric Crystals and limit of KR perfect crystals of type $A^{(1)}_n$
3. 学会等名 South eastern Lie Theory workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 中島 俊樹
2. 発表標題 Polyhedral Realization of Crystal Bases
3. 学会等名 South eastern Lie Theory workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 中島 俊樹
2. 発表標題 クラスター代数と結晶基底
3. 学会等名 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 笹田記念号刊行に寄せて」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中筋 麻貴
2. 発表標題 Casselman問題へのアプローチ法
3. 学会等名 研究会「第8回数論女性の集まり」2015年5月30日, (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Maki Nakasuji
2. 発表標題 Casselman's basis of Iwahori fixed vectors
3. 学会等名 French-Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 中筋 麻貴
2. 発表標題 Casselman問題とDuality
3. 学会等名 日本数学会2015年度秋季総合分科会
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 中筋 麻貴
2. 発表標題 Casselman問題とIwahori Hecke環
3. 学会等名 西早稲田数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yasushi Gomi
2. 発表標題 Gauss sums on the Iwahori-Hecke algebras of type A
3. 学会等名 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 笹田記念号刊行に寄せて」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yasushi Gomi
2. 発表標題 Determination of string C-Groups of order 1024
3. 学会等名 Discrete Mathematics and Applications (University of the Philippines Diliman) (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	中筋 麻貴 (Nakasuji Maki) (30609871)	上智大学・理工学部・准教授 (32621)	
研究分担者	五味 靖 (Gomi Yasushi) (50276515)	上智大学・理工学部・准教授 (32621)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Algebraic Analysis and Representation Theory	開催年 2017年～2017年
--	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	North Carolina State University			
ロシア連邦	MCCME			