

令和元年6月17日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04797

研究課題名(和文) 簡約型球等質空間に対するカルタン分解と不変測度の研究

研究課題名(英文) A study of Cartan decompositions and invariant measures for spherical homogeneous spaces of reductive type

研究代表者

笹木 集夢 (Atsumu, Sasaki)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：60514453

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：半単純対称空間に対するカルタン分解の一般化として、簡約型球等質空間に対するカルタン分解を明示的に与えた。これを用いることで、簡約型球等質空間への極大コンパクト部分群の作用によるスライスを具体的に与えることに成功し、この作用が可視的であることを証明した。また、本研究に付随して、非コンパクト半単純対称対と可換なコンパクト対称三対との間に双対定理を完成させた(馬場蔵人氏、井川治氏との共同研究)。さらに、複素ハイゼンベルグリー群の等質空間に対する可視的作用の理論が進展した(Ali Baklouti氏との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究結果により、簡約型複素等質空間に対して可視的作用を持つこととそれが球等質空間であることが同値であり、表現論の無重複という性質と複素幾何における可視的作用という性質の深い関係が明らかになった。特に簡約型複素等質空間に対する可視的作用の分類が得られた。また、非対称な簡約型球等質空間に対してもカルタン分解を明示的に与えたことにより、その手法は簡約型実球等質空間に対しても適用できると予想される。さらに、本結果を用いて、半単純対称空間の一般化として制限ルートの理論あるいは調和解析の発展が期待される。

研究成果の概要(英文)：We give an explicit description of a Cartan decomposition for spherical homogeneous spaces of reductive type as a generalization of a Cartan decomposition for semisimple symmetric spaces. Using this, we prove that the maximal compact group action on a spherical homogeneous space of reductive type is visible by constructing a slice due to its Cartan decomposition. Concerning to this study, we provide a duality theorem between non-compact semisimple symmetric pairs and commutative compact symmetric triads (joint work with Kurando Baba and Osamu Ikawa). Moreover, we study visible actions on complex Heisenberg homogeneous spaces (joint work with Ali Baklouti).

研究分野：リー群と表現論

キーワード：カルタン分解 簡約型球等質空間 可視的作用 制限ルート 不変測度 双対定理 ハイゼンベルグ等質空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

小林俊行(東京大学)によって提唱された複素多様体における可視的作用により(2005年),これまで散在的に発見されていた無重複表現の「無重複」という性質に対して統一的解釈を与えるという理論が進展している(無重複性の伝播定理,2005年,2013年).可視的作用の理論において,群作用による各軌道と交叉する部分多様体(これを以下スライスという)および各軌道を保存する反正則微分同相の構成が必要である.この問題は,群の作用する多様体の幾何構造の研究,あるいは等質空間に対する群の分解定理など,表現論以外からその重要性が認識されつつある.研究代表者は,可視的作用の分類理論の構築を研究テーマの1つに定め,これまでに線型空間や複素冪零軌道に対する理論を完成された.本研究課題の対象である簡約型球等質空間は,半単純対称空間を含むクラスで,その上の関数空間に定まる表現が無重複に既約分解されるという性質をもつ.一方で,無重複性の伝播定理を適用すると,簡約型複素等質空間に対して,極大コンパクト部分群の作用が可視的であることはそれが球等質空間であるための十分条件である.よって,簡約型複素等質空間における可視的作用の分類理論は,球等質空間,特に非対称な場合における可視的作用の研究を遂行することにより達成される.

前研究課題(科研費,課題番号:24740026)の助成を受けて,非管状型エルミート対称空間の複素化上の直線束(2010年,2015年)やケーリー型球等質空間の一部に対して(2011年)可視性の証明を与えたが,その証明において非コンパクトな簡約リー群のカルタン分解を具体的に与えることによりスライスを構成した.これらの先行結果で得た,いくつかの半単純対称空間に対するカルタン分解の「編み上げる」という手法を,他の簡約型球等質空間に応用する形で本問題の解決を目指し,本研究課題をスタートした.

一方で,簡約型球等質空間は,半単純対称空間に続く対象としてその上の調和解析の研究が注目されている.古典的に知られているリーマン対称空間を始め,擬リーマン対称空間に対するカルタン分解の理論も1980年前後に得られており(Flensted-Jensen, Rossmann),制限ルート系の理論も整備されたことで(大島利雄-関口次郎,1984年),その上の調和解析の理論は進展している.一方で,非対称な簡約型球等質空間に対して,カルタン分解に相当する群の分解定理が2,3の例を除いてほとんど知られていない状況で,そのために半単純対称空間の場合の制限ルートをういた手法が適用できず非可換調和解析は発展途上であった.以上の背景によっても,簡約型球等質空間に対するカルタン分解の理論は解析においても重要な役割を果たすと期待されていた.実際に,Krötz, Sayag, Schlichtkrullなどは共同で簡約型実球等質空間上の調和解析を目指し,カルタン分解(彼らは極分解という用語を用いている)に関する研究を行っている.

## 2. 研究の目的

本研究課題では,複素半単純リー群の簡約型球等質空間に対する可視的作用の分類理論を構築し,また調和解析への応用を視野に入れ,以下の3つについて解明することを目的とした.

- (1) 複素半単純リー群の簡約型球等質空間に対して,カルタン分解を明示的に与える.つまり,複素半単純リー群の極大コンパクト部分群およびその簡約かつ球な複素閉部分群による両側剰余空間がある可換群に代表元が取れることを,可換群を具体的に与えることで決定する.以下,この可換群をカルタン分解の可換部分と呼ぶことにする.
- (2) 前項で与えた可換群により,複素半単純リー群のリー環の制限ルートの集合を決定する.また,制限ルートの集合を通してカルタン分解の可換部分の適切な構成法を模索する.
- (3) 前2項の応用として,簡約型球等質空間の不変測度を明示的に与える.特に,不変測度を極大コンパクト部分群のハール測度とカルタン分解の可換部分のリー環のルベーク測度によって記述する.

## 3. 研究の方法

前項の研究の目的で述べた3つの課題に対して以下の方法で研究を実施した.

- (1) 前述の通り,対称空間に対する研究は完結しているため,非対称な簡約型球等質空間が研究対象である.簡約型球等質空間は,既約な場合はKrämer(1979年)によって12系列に,既約でない場合はBrion(1986年)に10系列に分類されている.本研究課題では,分類に沿って研究を遂行した.適当な対称部分群を準備して半単純対称空間に対するカルタン分解を「編み上げる」ことによりカルタン分解の可換部分を構成する.なお,階数1の場合は,複素球面に対する幾何学的考察により構成する.次に,簡約型球等質空間における極大コンパクト部分群の作用によるスライスをカルタン分解から構成する.さらに,このスライスが正規実型を実現する対合によって不変であることを示し,よってこの作用が可視的作用であることを証明する.
- (2) 具体的に構成したカルタン分解の可換部分が複素半単純リー環のカルタン部分環に含まれることにより制限ルートの集合を具体的に計算できる.
- (3) 不変測度の明示的表示は,半単純対称空間に対する不変測度の明示的表示に倣いヤコビアン計算に帰着させる(cf. Schlichtkrull, 1984年).

## 4. 研究成果

- (1) 簡約型球等質空間に対するカルタン分解および可視的作用の理論. (1-a) 複素半単純リー群の簡約型球等質空間に対して,可換部分を具体的に記述し,カルタン分解を明示的に与

えることに成功した。(1-b) 簡約型球等質空間における極大コンパクト部分群の作用によるスライスを構成し、この作用が可視的なることを証明した。この結果から、簡約型複素等質空間に対して、可視的であることと関数空間上の表現の無重複性が同値であることを導き、簡約型複素等質空間における可視的作用の分類理論が完成した。(1-c) 上述で構成したスライスの次元が、簡約型球等質空間の階数(表現の既約分解に現れる既約表現のサポートの階数)に一致することを発見した。これらの結果について、階数1の簡約型既約球等質空間(散在型3種)については論文[1]で掲載が決定された(2019年に出版予定)。ケーリー型、4対称空間に対する結果は論文準備中、既約でない場合については今後論文にまとめる予定である。また、本結果をチュニジア(2015年12月、発表[20]、2017年12月、発表[11])、タイ(2016年3月、発表[18])、大阪市立大学(2019年3月、発表[1])での国際研究集会や日本数学会学会の特別講演(2016年3月、発表[19])、富山大学(2017年2月、発表[13])、名城大学(2017年3月、発表[12])や福島大学(2018年6月、発表[6])での国内研究集会で発表した。

- (2) 既約かつ非対称な簡約型球等質空間に対する制限ルートの集合。前項(1)の結果を受けて、既約かつ非対称な簡約型球等質空間に対して、可換部分に対する制限ルートの集合を決定した。本結果は東京理科大学(2015年12月、発表[21])で一部を紹介した。
- (3) 複素単純リー群の球幕零軌道における可視的作用とスライスの次元公式。(4-a) 前研究課題からの継続で、複素単純リー群の球幕零軌道における可視的作用の研究結果をまとめた論文[4]が出版された(2016年)。(4-b) 球幕零軌道への極大コンパクト部分群の作用によるスライスの次元公式を与えた。また、この次元公式が球幕零軌道の階数に一致することを明らかにした。本結果は論文[2]にまとめ出版された(2018年)。また、京都産業大学での学会(2015年、発表[22])で発表した。
- (4) 半単純擬リーマン対称対と可換なコンパクト対称三対との間の双対性の理論。本研究は、馬場蔵人(東京理科大学)と井川治(京都工芸繊維大学)との共同研究に基づく。これは、当初の計画にはなかった内容であるが、共同研究者からの提案により実現し結果を得た。(4-a) 簡約型球等質空間の特別なクラスである擬リーマン対称空間に対して、リーマン対称空間に対する(カルタンの意味での)双対性を拡張し、擬リーマン対称対と可換なコンパクト対称三対との間の双対性を与えた。(4-b) Bergerによる擬リーマン対称対の分類を、可換なコンパクト対称三対の分類および双対性を通じた別証明を与えた。(4-c) 擬リーマン対称空間における極大コンパクト部分群の作用において、カルタン分解から構成される各軌道と交叉する部分多様体(これもスライスと呼ぶことにする)の幾何学的性質を研究し、以下を証明した。(4-c-1) 任意の軌道は擬リーマン多様体である。(4-c-2) 各軌道の法空間に誘導される計量は正定値である。(4-c-3) スライスは全測地的である。(4-c-4) スライスは各軌道と(擬リーマン計量に関して)直交する。(4-d) 双対性を通してキャリブレーション等式やキャリブレーション不等式への応用されることを発見した。結果(4-d-1)から(4-c-4)の一部は、論文[3]にまとめ出版された(2017年)。また、関西大学(2016年、発表[16, 17])や東京大学(2018年3月、発表[7, 8])で発表した。なお、双対性を経由した種々の性質の対応、および擬リーマン対称対の分類の別証明については論文準備中である。本結果は、結果(1)にも大きな影響を与え、簡約型実球等質空間に対するカルタン分解の研究に応用可能であると期待される(現在進行中)。
- (5) 複素ハイゼンベルグリー群の等質空間における可視的作用の理論。本研究は、Ali Baklouti氏(Sfax大学、チュニジア)との共同研究に基づく。簡約リー群の等質空間と対極的にある幕零リー群や可解リー群の等質空間に対する可視的作用の研究の第一歩としてハイゼンベルグリー群の等質空間を研究し、以下の成果を得た。(5-a) 連結かつ単連結な実ハイゼンベルグリー群の任意の等質空間の複素化に対して可視的に作用する閉部分群およびスライスを具体的に与え可視的作用であることを証明した。(5-b) (5-a)の応用として、実ハイゼンベルグリー群の無重複表現の系列を発見した。本結果に関する論文は現在準備中である。また、名城大学(2019年、発表[3])や九州大学(2019年、発表[2])で発表した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計6件)

- [1] Atsumu Sasaki, A Cartan decomposition for non-symmetric reductive spherical pairs of rank-one type and its application to visible actions, in Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, (出版準備中)。
- [2] 笹木集夢, Visible actions on Heisenberg homogeneous spaces and application to representation theory, 2019名城幾何学研究集会「多様体上の種々の幾何構造の融合」講演アブストラクト, 査読無, 2019年, 38-40。
- [3] Atsumu Sasaki, Dimension formula for slice for visible actions on spherical nilpotent orbits in complex simple Lie algebras, in Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, 207巻, 2018年, 209-243, doi:10.007/978-3-319-65181-8。

- [ 4 ] Kurando Baba, Osamu Ikawa and Atsumu Sasaki, A duality between compact symmetric triads and semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs with applications to geometry of Hermann type actions, in Hermitian--Grassmannian Submanifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, 203 巻, 2017 年, 211–221, doi:10.1007/978-981-10-5556-0.18.
- [ 5 ] 笹木集夢, ケーリー型球等質空間における群作用と軌道分解, 名城大学幾何学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」講演アブストラクト, 査読無, 2017 年, 30–34.
- [ 6 ] Atsumu Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits in complex simple Lie algebras, Journal of Lie Theory, 査読有, 26 巻, 2016 年, 597–649, <http://www.heldermann.de/JLT/JLT26/JLT263/jlt26025.htm>.

〔学会発表〕(計 22 件)

- [ 1 ] Atsumu Sasaki, An explicit description of a Cartan decomposition for spherical homogeneous spaces, The 2nd International Conference: Geometry of Submanifolds and Integrable Systems, 大阪市立大学, 2019 年 3 月, (招待講演),(国際学会).
- [ 2 ] 笹木集夢, Visible actions on Heisenberg homogeneous spaces, 2018 年度表現論ワークショップ, 九州大学, 2019 年 3 月.
- [ 3 ] 笹木集夢, Visible actions on Heisenberg homogeneous spaces and application to representation theory, 2019 名城幾何学研究集会「多様体上の種々の幾何構造の融合」, 名城大学, 2019 年 3 月, (招待講演).
- [ 4 ] Atsumu Sasaki, Recent study on strongly visible actions on complex manifolds, Seminar of Department of Mathematics, University of Sfax, スファックス, チュニジア, 2018 年 9 月, (招待講演).
- [ 5 ] Atsumu Sasaki, Introduction to visible actions on complex manifolds, Seminar of Department of Mathematics, University of Sfax, スファックス, チュニジア, 2018 年 9 月, (招待講演).
- [ 6 ] 笹木集夢, 簡約型球等質空間およびその実型に対するカルタン分解とその双対性, 福島幾何学研究集会 2018, コラッセ福島, 2018 年 6 月, (招待講演).
- [ 7 ] 馬場蔵人, 井川治, 笹木集夢, 擬リーマン幾何学におけるキャリブレーション不等式と双対性, 日本数学会 2018 年度年会幾何学分会, 東京大学, 2018 年 3 月.
- [ 8 ] 馬場蔵人, 井川治, 笹木集夢, キャリブレーション等式と超極作用, 日本数学会 2018 年度年会幾何学分会, 東京大学, 2018 年 3 月.
- [ 9 ] 笹木集夢, A Cartan decomposition for spherical homogeneous spaces of reductive type, 日本数学会 2018 年度年会函数解析学分会, 東京大学, 2018 年 3 月.
- [ 1 0 ] 笹木集夢, 簡約型球等質空間に対するカルタン分解, 首都大学東京幾何学セミナー, 首都大学東京, 2018 年 1 月.
- [ 1 1 ] Atsumu Sasaki, A Cartan decomposition for spherical homogeneous spaces of reductive type, 5th Tunisian-Japanese Conference: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, マーディア, チュニジア, 2017 年 12 月, (招待講演),(国際学会).
- [ 1 2 ] 笹木集夢, ケーリー型球等質空間における群作用と軌道分解, 名城幾何学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」, 名城大学, 2017 年 3 月, (招待講演).
- [ 1 3 ] 笹木集夢, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics, 富山大学, 2017 年 2 月, (招待講演).
- [ 1 4 ] 笹木集夢, 既約球等質空間のカルタン分解について, 2016 年度表現論ワークショップ, 県民ふれあいセンター, 鳥取県, 2017 年 1 月.
- [ 1 5 ] 笹木集夢, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2016 年 10 月.
- [ 1 6 ] 馬場蔵人, 井川治, 笹木集夢, A duality between semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs and compact symmetric triads, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会幾何学分会, 関西大学, 2016 年 9 月.
- [ 1 7 ] 馬場蔵人, 井川治, 笹木集夢, 半単純擬リーマン対称対の別証明 - コンパクト対称三対の視点から -, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会幾何学分会, 関西大学, 2016 年 9 月.
- [ 1 8 ] Atsumu Sasaki, A generalization of Cartan decomposition for non-symmetric spherical homogeneous spaces, The 5th KMITL-TKU Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, バンコク, タイ, 2016 年 3 月, (招待講演),(国際学会).
- [ 1 9 ] 笹木集夢, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, 日本数学会 2016 年度

年会函数解析学分科会（特別講演），筑波大学，2016年3月，（招待講演）。

- [20] Atsumu Sasaki, Admissible representations, multiplicity-free representations and visible actions on non-tube type Hermitian symmetric spaces, 4th Tunisian-Japanese Conference: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Professor Jean Ludwig, モナステール, チュニジア, 2015年12月, (招待講演), (国際学会).
- [21] 笹木集夢, 非対称球等質空間に対するカルタン分解と制限ルートについて, 神楽坂幾何セミナー, 東京理科大学, 2015年12月.
- [22] 笹木集夢, Remarks on visible actions on spherical nilpotent orbits, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会函数解析学分科会, 京都産業大学, 2015年9月.

〔その他〕

ホームページ: <http://www.sm.u-tokai.ac.jp/~sasaki/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。