

令和元年5月19日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04799

研究課題名(和文) 数論的多重対数予想の解決を担う新しい直交多項式系の創成とパデ近似

研究課題名(英文) New approach for orthogonal polynomials in Pade approximation and polylogarithms conjecture

研究代表者

平田 典子(河野典子)(HIRATA-KOHNO, Noriko)

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：90215195

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：パデ近似というディオファントス近似は、数の数論的性質を調べる手法である。多重対数の無理数性や超越性については多くの予想がたてられていたが、代数的数における多重対数関数の値の無理数性に関する統一的な結果は存在していなかった。先行研究において多重対数を有理数体に添加したベクトル空間の次元の評価がT.Rivoalによって得られていたが、多重対数の無理数性や一次独立性はこの方法では得られなかった。研究代表者は国内外の研究協力者との研究討議の結果、代数的数での多重対数関数の代数体上の一次独立性や無理数性について、かつて予想であった新結果を具体例と共に得た。周期的係数を持つ級数の新しい無理数性も解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

素数は人を魅了してやまないが、素数を解明する大切な関数にリーマンゼータ関数がある。リーマンゼータ関数と類似の性質をもち、工学にも頻繁に登場する多重対数関数という関数がある。これは対数関数の一般化であり、対数関数を表す積分表示の反復で記述される一変数関数である。多重対数関数を研究することはリーマンゼータ関数のみならず、数の性質および種々の自然現象を解明することに資する。多重対数関数の値の考察に効果的なパデ近似という手法を発展させて、我々は新しい無理数を発見したが、このように整数論の予想に近づく成果を得たことは、我が国の基礎科学の地位を高め、数学や整数論そのものに対して新たな道を拓くものである。

研究成果の概要(英文)：Let us consider a polylogarithmic function in one variable as is defined by generalized logarithmic function. Lots of important conjectures have been considered related to the values of this function, containing so-called the polylogarithms conjecture. T. Rivoal obtained a lower bound for the dimension of the linear subspace spanned by the polylogarithms over the rational number field, however, his result does not yield any irrationality nor linear independence over the rational number field of the polylogarithms themselves. In contrast, we determine when takes the polylogarithmic function irrational values at algebraic numbers. We succeeded in giving a new criterion for the linear independence of polylogarithms over number fields as well as in making new concrete examples of linear independent polylogarithms. Our method is also useful to investigate other arithmetical properties of series with periodic coefficients.

研究分野：数論

キーワード：多重対数 パデ近似 エルミート-パデ近似 ディオファントス近似 多重対数予想 漸近展開 直交多項式 数論的近似

## 1. 研究開始当初の背景

(1) Ch. Hermite と、弟子の H. Pade による「パデ近似」もしくは「エルミートーパデ近似」と呼ばれるディオファントス近似の一種が数論的関数、特に多重対数関数の数論的性質を調べる手法として、先行研究に用いられていた。対数関数では知られていても、多数対数関数の値の無理数性や超越性については未知の部分が多く、古今より多くの予想がたてられていたが、代数的数における多重対数関数の値の無理数性に対する統一的な結果は存在していなかった。対数を多重対数に拡張するための課題というものは、実はリーマンゼータ関数の研究にも直結するため、数学全般において極めて重要なのである。

(2) 一変数複素関数である多重対数関数の数論的性質に対する先行研究には、E. Nikisin, M. Hata, T. Rivoal らによる結果がある。特に Rivoal は、Yu. Nesterenko の方法を用いて、多重対数を有理数体に添加したベクトル空間の次元の下からの非自明な評価を得ていた。しかしこの手法では実際の値の無理数性や有理数体上での一次独立性は、一切従わなかった。

(3) 以上(1)(2)の現状に対し、研究代表者は課題研究を開始して、代数的数における多重対数関数の値の無理数性や超越性に寄与できるような新規手法構築を試みた。

## 2. 研究の目的

(1) 多重対数関数の値に関して、パデ近似の理論そのものの根幹を変えるような斬新な考察をおこなうことによって近似の手法を発展させ、多重対数予想を含む問題の解決に資する新証明法を確立することが本研究課題の主目的であった。直交多項式に対する知見の拡充を行うことも、パデ近似の成り立ちからこの目的のために不可欠なのである。

(2) パデ近似の証明に頻発する或る行列式の非零性の証明とその絶対値の下からの精密な評価が、新規手法の開拓における根幹の課題である。またパデ近似の理論の  $p$  進解析に基づいた総合的な考察も実施されるべきであった。これらのパデ近似は、微分方程式に対する数値解析的な解構成にも応用されるため、数学の多くの部分に貢献するのである。

## 3. 研究の方法

(1) まずフランスの研究者 S. David 氏および Y. Bugeaud 氏との共同研究を実施した。また大阪大学ポスドク研究員の川島誠氏との共同研究も実施した。いずれも密な研究討議を、実際に国内外への出張もしくは相手を招聘することで実行した。メールでは数学的な内容まで到底つめられないため、実際に会って討議を重ねた。

(2) 上述の他にも国内外の研究者との意見交換、国内外で開催された研究集会における討議を経由して、多くの共同研究および論文執筆をおこなうことができた。カナダ、アメリカ、オランダ、南アフリカ、メキシコ、フランスなどの諸外国の研究者との研究討議も大きな果実を生むものになった。特に 2017 年 1 月には研究代表者の本務先である日本大学理工学部において国際研究集会である DARF2017 を主催し、その参加者は百名を超えたが、そこでは様々な研究者を諸外国から招聘して直接の対面による実効的な研究討議を実施し、共同研究を含め、実質的に成果を上げることができた。これらの共同研究による共著論文も査読付雑誌に出版された。

## 4. 研究成果

(1) ディオファントス近似の手法であるパデ近似の基本的方法に改良を加え、多重対数関数に適用させた S. David 氏との共同研究をおこなった。これは行列式の非自明な評価を用いるものであり、リーマンゼータ関数についての考察も含む極めて重要なものである。S. David 氏との共同研究については現在さらに一般化された結果を得ており、その投稿の準備中である。また多重対数関数の値の有理数体上および高次の代数体上の一次独立性に関する、伊藤勝氏および鷲尾勇介氏との共同研究にも同じ手法を適用することができて、査読付論文に出版した。これは、与えられた任意次数の代数体上で一次独立になる多重対数の例の構築まで可能にしたものであり、超越性の証明の可能性を示唆している。このため現時点で期待される最高の結果と言って良い。

(2) 得られた手法を適用したディオファントス近似によって、整数において整数に近い値をとる整関数についてもその複素関数が多項式になるための条件を決定し、古津博俊氏（日本大学理工学部准教授）との共同研究論文として査読付雑誌に出版した。これはさらに複数の解析関数の値の一次従属性の決定条件を記述する考察へと発展させることができたため、新たな論文としてまとめることができて、査読付雑誌での出版に到った。

(3) 技巧的に難しい精緻なパデ近似を用いて、周期的な係数をもつ級数を値の有理数体上の一次独立性に対する今までに類似のない新しい結果を証明した。この内容についてはカナダの Banff センターにおける国際研究集会 “Diophantine Approximation and Algebraic Curves”, BIRS, Banff, Alberta, Canada (17w5045) における招待講演者として基調講演をおこなった。その内容を拡張したものを現在、出版準備中である。

(4) F. Luca との共著論文を査読付雑誌に出版して、線形回帰数列によって表されたディオファントス方程式の整数解の決定問題にも本課題の手法により寄与することができた。T. Kovacs 氏、宮崎隆史氏との共同研究においても、古くから知られているが一般に解の有限性すら不明であるディオファントス方程式の  $S$  整数解および整数解の決定問題に関する結果も発表した。

(5) 川島誠氏との共同研究で対数一次形式におけるディオファントス近似の定数値を、パデ近似を活用して改良することができた。これはディオファントス方程式の整数解の決定問題への応用が期待される結果である。論文としてまとめて投稿準備中である。

(6) Y. Bugeaud 氏とは楕円関数の有理点に関する精密なディオファントス近似不等式を証明することができた。これについても現在、投稿準備中である。

(7) この他にも応用数理的な見地からディオファントス近似の考察に基づく暗号数理の知見を得た。これは秋山浩一郎氏、伊藤勝氏および中村周平氏との共著論文として、応用数理的な査読付雑誌にアクセプトされた。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Noriko Hirata-Kohno, “Diophantine Approximation”, Sugaku Exposition, American Mathematical Society, 査読有り, 2020, 印刷中。
- ② Koichiro Akiyama, Shuhei Nakamura, Masaru Ito and Noriko Hirata-Kohno, “A key exchange protocol relying on polynomial maps”, International Journal of Mathematics for Industry, 査読有り, 2019, 印刷中。
- ③ Hiroshi Furutsu and Noriko Hirata-Kohno, “Linear dependence criterion of almost integer valued functions: a generalization of the Polya-Pisot theorem”, 査読有り, J. Research Institute of Science and Technology, Nihon University, vol. 144, (2019), 12-16.
- ④ Noriko Hirata-Kohno, Masaru Ito and Yusuke Washio, “A criterion for the linear independence of polylogarithms over a number field”, Bessatsu, RIMS Kokyuroku, The RIMS, Kyoto University, B. 64, (2017), 3-18, 査読有り  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>
- ⑤ Noriko Hirata-Kohno, Tunde Kovacs - Coskun and Takafumi Miyazaki, “On the Nagell-Ljunggren equation”, RIMS Kokyuroku, The RIMS, Kyoto University, vol. 2013, (2017), 60-67, 査読なし  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2013-08.pdf>
- ⑥ H. Furutsu and Noriko Hirata-Kohno, “Conditions of an Analytic Function to be a Polynomial via Diophantine Approximations”, J. Research Institute of Science and Technology, Nihon University, vol. 136, (2016), 12-16, 査読有り  
DOI : 10.11346/cstj.2016.136\_12
- ⑦ Noriko Hirata-Kohno, and Florian Luca, “On the Diophantine equation  $F_n x + F_{n+1} x = F_m y$ ”, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 45/2, (2015), 509-538, 査読有り  
<https://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1434208485>

[学会発表] (計 7 件)

- ① Makoto Kawashima and Noriko Hirata-Kohno, “Linear independence of special values of logarithms revisited”, Diophantine Analysis and Related Fields 2018, March 2018  
[http://www.math.keio.ac.jp/~takaaki/DARF2018/DARF2018prog\\_j.html](http://www.math.keio.ac.jp/~takaaki/DARF2018/DARF2018prog_j.html)

- ② Shuhei Nakamura, Masaru Ito, Koichiro Akiyama and Noriko Hirata-Kohno, “A wild polynomial automorphism in positive characteristic and a key exchange protocol”, 日本応用数学会年会 研究部会オーガナイズドセッション, 数理アルゴリズムとその応用, 2017  
<http://annual2017.jsiam.org/program>
- ③ Yusuke Washio, Noriko hirata-Kohno, Yukiko Ishii, Yuta Kurimoto, Kiyomitsu Suzuki and Miku Zenyoji, “The Irrationality via Diophantine Approximation and Mathematica”, RIMS Workshop, The RIMS of Kyoto University, 2017  
[https://www.dropbox.com/s/cxpw8mfs7rlvmh2/program2017\\_v8.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/cxpw8mfs7rlvmh2/program2017_v8.pdf?dl=0)
- ④ Noriko Hirata-Kohno, “New Pade approximation related to a series with periodic coefficients”, Diophantine Approximation and Algebraic Curves, BIRS, Branff, Alberta, No. 17w5045, 2017  
<https://www.bris.ca/events/2017/5-day-workshops/17w5045/schedule>
- ⑤ Masaru Ito, Shuhei Nakamura, Koichiro Akiyama and Noriko Hirata-Kohno, “A key exchange protocol via polynomial automorphisms related to Jacobian conjecture”, The University of Electro-Communications, 2017 日本応用数学会連合発表会, 2017  
<http://union2017.jsiam.org/program#879>
- ⑥ Koichiro Akiyama and Noriko Hirata-Kohno, “A Key Exchange Protocol using Polynomial Map (多項式写像を用いた鍵共有方式)”, 2017 Symposium on Cryptography and Information Security SCIC, 2017  
<http://www.iwsec.org/scis/2017/program.html>
- ⑦ Noriko Hirata-Kohno, “Pade approximation and the irrationality of polylogarithms”, Leuca 2016 conference (celebrating Professor Michel Waldschmidt’s 70th birthday) in Leuca, 2016  
<http://www.rnta.eu/mw70/speakers.html>

[その他]

ホームページ等

<http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/40/0003941/profile.html>

<http://trout.math.cst.nihon-u.ac.jp/~hirata/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究協力者

研究協力者氏名 : DAVID, Sinnou

ローマ字氏名 : (DAVID, Sinnou)

研究協力者氏名 : BUGEAUD, Yann

ローマ字氏名 : (BUGEAUD, Yann)

研究協力者氏名 : LUCA, Florian

ローマ字氏名 : (LUCA, Florian)

研究協力者氏名 : 川島 誠

ローマ字氏名 : (KAWASHIMA, Makoto)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。