様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８００

研究課題名（和文）整数論に現れる多変数ゼータ関数の研究

研究課題名（英文）Research on multivariable zeta functions in number theory

研究代表者
佐藤　文広（Sato, Fumihiro）

津田塾大学・数学・計算機科学研究所・研究員

研究者番号：２０１２０８８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：異なるデータから定義される多変数ゼータ関数間の新しい関係として，クリフォード4次形式のゼータ関数と直交群のアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass 型ゼータ関数の関係，概均質ベクトル空間のゼータ関数とアイゼンシュタイン級数の周期との関係を研究した．また，そのような関係を確立するための手段となる逆定理を重さが整数および半整数のMaass形式の場合に整備し，レベル N の Maass形式に対する Shintani-Katok-Sarnak 対応に応用した．さらに，ホマロイダル多項式の極化，関数等式の貼り合わせ構成など，関数等式を満たす多変数局所ゼータ関数を構成する新しい方法を開発した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
各種のゼータ関数の相互関係は整数論における中心問題である．本研究は，この課題に多変数化されたゼータ関数という新しい視点から貢献したものであり，概均質ベクトル空間の理論と保型形式の理論を結ぶ新しい実例を構成すると同時に，既存の理論の枠を越えた非概均質的な実例の構成を行った．本研究は mission oriented ではなく curiosity driven な研究で直接の社会的意義は語りえないが，研究対象であるゼータ関数・保型形式は近年高エネルギー物理学において重要な意味を持ちつつあり，将来的には我々の自然認識の一部に組み込まれていくべきものと考えられる．

研究成果の概要（英文）：Several new relations between multivariable zeta functions obtained from different sources are studied, such as the zeta functions of Clifford quartic forms and the Koecher-Maass zeta functions of Eisenstein series of orthogonal groups, and prehomogeneous zeta functions and the periods of Eisenstein series. One of tools to establish such relations is converse theorem. We proved a converse theorem for Maass forms of level N of integral or half-integral weight and applied it to Shintani-Katok-Sarnak correspondence for Maass forms of level N. We also developed two methods of constructing new multivariable local zeta functions satisfying functional equations; polarization of homaloidal polynomials, and gluing of functional equations.

研究分野：代数学，とくに代数群の整数論

キーワード：概均質ベクトル空間　アイゼンシュタイン級数　ゼータ関数　関数等式

様　式　Ｃ－１９，Ｆ－１９－１，Ｚ－１９，ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

　近年，整数論において，多変数のゼータ関数の研究が新しい進展を見せている．階数の高い群上で定義されたアイゼンシュタイン級数の正則化された周期積分，ワイル群多重ディリクレ級数などはその著しい例である．研究代表者は 1980 年代から概均質ベクトル空間に付随する多変数のゼータ関数を研究してきたが，これらの新らたに導入された多変数のディリクレ級数と合わせ，整数論に現れる多変数ゼータ関数を総合的に研究することが適切な研究の方向性であると考えられた．一方で，研究代表者は，概均質ベクトル空間のゼータ関数と類似の性質を持ちながら，旧来の概均質ベクトル空間論の枠内に収まらないゼータ関数を見出していた．とくに，アルキメデス的局所関数等式を考えると，多変数化が非概均質的な関数等式の構成の新しい手段となり得ることを発見していた．これらが，多変数ゼータ関数を中心とする研究課題を設定する動機となった．

　多変数ゼータ関数の研究を必要とされる根拠を，より具体的に踏み込んで説明する．

(1) 概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論はリーマンゼータ関数に代表される古典的ゼータ関数を保型形式の理論とは別方向に拡張するものとして出発したが，現時点では，実は保型形式（とくにアイゼンシュタイン級数）と何らかの形で関係すると期待されている．この関係を明確にすることが，概均質ベクトル空間の理論の基本的問題と言えよう．その際，1 変数のゼータ関数に限定せず，多変数のゼータ関数に拡張して理解することが状況をより透明にするように思われる．

(2) 概均質ベクトル空間のゼータ関数と保型形式に付随する L 関数との関係は,一通りではない．オイラー積を持ち標準 L 関数と対応するクラス,保型形式のフーリエ係数を用いて構成される Koecher-Maass 型のゼータ関数と対応するクラスなどがこれまで知られている.近年研究の進んだワイル群多重ゼータ関数については，それらのクラスに含まれない概均質ベクトル空間のゼータ関数を表現できる可能性が Bump，Chinta，Wen 等の研究によって示唆されており，この 2 つのタイプの多変数ゼータ関数の関係をより突き詰めることが必要である．とくに，これまでに知られていたクラスと異なり，ワイル群多重ゼータ関数ではメタプレクティック群上のアイゼンシュタイン級数との関係が自然に表れる．ある種の概均質ベクトル空間のゼータ関数がメタプレクティックアイゼンシュタイン級数と関係するであろうとの推測は，これまでにもなされていたが，ワイル群多重ゼータ関数は初めてそれを具体的なものにする可能性を内包しているようである．

(3) 概均質ベクトル空間は，一般線型群の等質空間であり，かつ，極小とは限らぬ放物型部分群が開軌道をもつもの(弱球等質空間)と対応する．弱球等質空間の描像では，ゼータ関数はアイゼンシュタイン級数との類似性が明らかになる (F.Sato, Tohoku Math.J. 1998)．この類似を単なる類似から，具体的に定義，証明できる関係に進化させるカギがアイゼンシュタイン級数の周期積分の考察である．アイゼンシュタイン級数の周期積分がワイル群多重ゼータ関数と結びつく例も，まだ特殊な場合ではあるが Venkatesh によって指摘されている．これも，これらの多変数ゼータ関数の相互関連の研究有効性を意味するものと解釈できる．

(4) 多変数のゼータ関数は，局所ゼータ関数のレベルでみるならば，前項の視点では包摂できない広がりを持ちうることが理解されてきている．正則概均質ベクトル空間の基本相対不変式系の複素べきは，そのフーリエ変換が双対的な概均質ベクトル空間の基本相対不変式系の複素べきによって（ガンマ関数，指数関数で記述されるガンマ因子を係数として）表されることが以前から知られている (F.Sato, Tohoku Math.J., 1982)．これが，概均質ベクトル空間における局所関数等式である．しかし，最近になって，概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない多項式であっても，同種の局所関数等式が成立する場合（クリフォード 4 次形式の場合）が存在することが発見された (F.Sato, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 2007; F.Sato and T.Kogiso, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 2012)．ここで，1 変数の局所ゼータ関数を考えると，そのような例を発見することは困難であるが，一方，変数の個数を増やし，多変数の局所ゼータ関数を許すならば，局所関数等式を満たす多項式系 2 つを取り，ある意味でそれらを貼り合わせることで，概均質の枠組みに収まらない局所関数等式が比較的容易に構成されることが示されている．概均質ベクトル空間の理論では，局所関数等式の成立の根拠を十分大きい群による不変性を持つ，いわば，対称性の高い多項式であるところに求めていた．しかし，上述のような結果を踏まえると，群不変性だけに関数等式成立の根拠を求めることは狭すぎる観点であることが分かる．したがって，関数等式を満たす多変数局所ゼータ関数をもつ多項式系を与える自然な枠組みを概均質ベクトル空間を越える形で見出すことが求められる．数論的なゼータ関数については，関数等式の存在はその一つの特徴であり，局所関数等式が存在するようなクラスの対象は代数的数体上の整数論の対象としても興味あるものとなる可能性が高い.これは，概均質ベクトル空間の場合に典型的に生じたことであり，新たな数論の研究対象の発見という観点からも非概均質的関数等式の理解は重要である．

２．研究の目的

　本研究は，上記のような背景の下で，次の 2 つを究極の目的とした．

(1) 概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数,高階数のアイゼンシュタイン級数の周期積分,

ワイル群多重ディリクレ級数など，出自の異なる多変数ゼータ関数の間の相互関係を（概均質ベクトル空間を焦点として）発見・解明することである．
(2) 複数の有理関数で，その多変数複素べきで定義される局所ゼータ関数が関数等式を満たすものを与える自然な枠組みで概均質ベクトル空間論の一般化となるものを見出すことである
　具体的には，どちらの目的についても，豊富な実例によって支えられるところまで進展しているとは言えない状況であり，本研究の実施期間内においては，具体例の豊富な構成とそれを通じて最終的な描像について一定の見通しを得ることを目指した．

３．研究の方法

研究は，研究代表者（佐藤文広），研究分担者（宮崎直）を中心に，必要に応じて研究協力者（研究組織欄に記載）の参加を得て行われた．具体的には，研究会「概均質セミナー」を２か月に 1 回程度の頻度で開催し，研究組織内での情報交換に加え，他の関連研究者からの研究報告も得て推進した．また，多数開催されている研究集会への参加，発表を通じた関連研究者との討論もたいへん有益であった．

４．研究成果

(1)研究目的 1 については，以下のような研究成果が得られた．
① 本研究に先立つ研究において，クリフォード代数の表現から定義されるクリフォード４次形式に対し，その４次形式の局所密度のオイラー積を係数とし，関数等式を満たす２変数ゼータ関数を構成していた．さらに，このゼータ関数は一般に，直交群の極大放物型部分群に付随するアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass 型ゼータ関数と一致することを予想し，偶数変数の分解型二次形式から得られるクリフォード代数の場合，符号 $(p+1,1)$の二次形式から得られるクリフォード代数で $p<10$ の場合には，予想がほぼ成立することを観察していた．本研究ではまず，この後者のケースに，ゼータ関数を調和多項式付きに拡張してさらに詳細に研究した．このとき，問題となるゼータ関数は概均質ベクトル空間のゼータ関数と同定され，概均質ベクトル空間論の方法を導入して研究することができ，（計算が未完成の 3 変数の場合を除いて）ゼータ関数の明示的な関数等式，極における留数などの詳しい情報を得た．これらの情報は，ゼータ関数が直交群の保型形式の Koecher-Maass 型のゼータ関数と一致することを示すにあたって，Maass の逆定理を適用することを可能にする．これによって，概均質ベクトル空間のゼータ関数を保型形式に付随するなんらかの L 関数として理解することのできる新しい例が作り出された．例えば 16 変数の正定値二次形式のゼータ関数の場合，最も標準的な見方では２次特殊線形群の保型形式とみられるものであるが，我々の結果では符号 (1,10) の直交群の保型形式とみることができる．このように，ここで得られた結果は，新しい現象（例えば未知のリフティング）も示唆しているように思われる．
② ゼータ関数と保型形式とを結びつけるにあたっては，いわゆる逆定理が重要である．やはり，本研究に先立つ研究において，分担者宮崎直・研究協力者杉山和成と共同し，レベル N の Maass 形式，保型超関数に対する逆定理の研究を行ってきた．本研究ではその理論の更なる整備と同時に応用を研究した．Maass 形式の逆定理の理論整備としては，スペクトルパラメータに対する制限の緩和，ガンマ因子付きゼータ関数の正則性の仮定をガンマ因子を含まないゼータ関数の正則性に弱めること，などを行った．また，ゼータ関数と Maass 形式とを媒介する道具として利用した保型超関数の保型性はいわゆる Voronoi-Ferrar 型の和公式として解釈される．この和公式の自然な試験関数の空間は，非ユニタリ主系列の空間のフーリエ変換として得られるが，この空間の漸近展開による特徴づけを試み，かなり広い固有値のクラスに対して特徴づけが得られた．逆定理の応用としては，重さ整数の正則保型形式に重さ半整数の保型形式を対応させる新谷対応の Maass 形式版（Katok-Sarnak 対応の（一方向の）レベル付き版）を研究した．逆定理の適用の際に要求される Dirichlet 指標で捩じられたゼータ関数の関数等式はすでに証明できており，自明な零点の位置の確認など，若干の課題を残すのみである．
③ 群 G をその放物型部分群 P に付随するアイゼンシュタイン級数を P-spherical で有理数体上非等方的な部分群 H 上で積分した周期を，ある種のゼータ関数として表す公式を証明した．これは，Hiroe-Oda,Bekki 等によって最近得られている代数体のゼータ関数に対する Hecke 型の積分公式についての結果を概均質ベクトル空間の立場から統一的に説明するものとなっていると同時に，アイゼンシュタイン級数の周期と多変数ゼータ関数の関係を具体的に与える例ともなっている．この公式は H が有理数体上等方的な場合にも，積分の適当な正則化を行うことにより成立することが，予想される．次に，簡約代数群 G が作用する概均質ベクトル空間において，群 G をその放物型部分群 P に制限しても依然として概均質ベクトル空間になっているとする．この設定の下で，制限によって得られる概均質ベクトル空間のゼータ関数の係数を G の数論的部分群による軌道上で平均したものを P から定まるアイゼンシュタイン級数の周期の平均値として表す公式が，上記の結果の系として，固定化群が有理数体上非等方的となるような点の軌道の場合に得られる．これは，Mizuno 等によって最近得られているゼータ関数の係数に関する結果を概均質ベクトル空間の立場から統一的に説明するものとなっている．

(2)研究目的 2 については，以下のような研究成果が得られた．
① ホマロイダル多項式の極化の複素ベキが，2 変数局所関数等式の例を与えることを証明した (研究協力者小木曽岳義との共同研究)．この場合，b-関数や局所関数等式の明示形が具体的に計算できることも特徴的である．出発点として与えられたホマロイダル多項式が概均質ベクトル空間の相対不変式ならば,その極化も概均質ベクトル空間の相対不変式となることも示した．一方，与えられたホマロイダル多項式がいかなる概均質ベクトル空間の相対不変式にもならないならば，その極化も概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないと予想される．この予想は一般的に未解決であるが，ある十分条件を求め，非概均質的なクリフォード 4 次形式の極化はやはり非概均質的であることを示した．これにより，ホマロイダル多項式の極化により，概均質ベクトル空間の理論によってカバーされない局所関数等式の例が新たに構成されたことになる．
② 本研究に先立つ研究において，2 つの局所関数等式の貼り合わせという手続きを導入し，非概均質的な多変数局所関数等式の構成に応用した．本研究では，まず，貼り合わせ手続きを具体例に適用するために必要となる多変数複素ベキの収束域の決定，弱関数等式から強関数等式を導くプロセスの有理関数系への一般化など，関数等式の貼り合わせ理論への補充を行った．また，これまで利用していた対称行列値貼り合わせデータを一般の行列値貼り合わせデータに拡張した構成を行った．一般の行列値の場合には，対称行列値の場合に必要であった貼り合わせデータが満たすべき符号条件が不要となるため，今後新しい例を構成することが容易になることが期待できる．さらに，貼り合わされる局所関数等式がともに概均質ベクトル空間から得られており，貼り合わせデータが群作用と整合的である場合に，概均質ベクトル空間の貼り合わせという概念を導入し，貼り合わせによって得られる関数等式も概均質ベクトル空間から得られることを確認した．概均質ベクトル空間の貼り合わせの応用としては，10 次特殊線形群を 5 次特殊線形群に同型な部分群で割った弱球等質空間への階数４の放物型部分群から得られるアイゼンシュタイン級数型のゼータ関数への適用が挙げられる．このゼータ関数は 4 次対称群による関数等式をもつが，基本となる単純鏡映に対する関数等式のうちで，これまで困難であった明示式の計算が一般公式を適用する形で可能になるのである．これは研究協力者杉山和成の以前の結果を簡易化するものである．この計算は，5 次特殊線形群の 2 階交代テンソル表現と 3 次一般線形群の標準表現のテンソル積として得られる概均質ベクトル空間における関数等式の明示計算に応用できる．この例は，従来，超局所解析のような道具を用いても計算が複雑になりすぎ，明示計算が行われていなかったケースである
③ 概均質的な局所関数等式の一般化として，調和多項式付きへの拡張がある．非概均質的関数等式の典型例であったクリフォード 4 次形式について，調和多項式付きへの拡張を行った．より一般の非概均質関数等式に対しても，調和多項式付きへの拡張を試みることが今後の課題となった．
④ 以上のような例を含む一般論のあるべき姿は残念ながら十分に明らかにはできていない．しかし，ホマロイダル性がかなり強い条件であり，そこに焦点を当ててさらなる研究がなされるべきであることは，本研究からも明白となったといってよい．とくに，局所関数等式存在の必要条件として，「べき指数のパラメータと独立な定数係数微分作用素による b-関数」が存在するという条件があるが，ホマロイダル性はその十分条件となることが予想される．また，これまでに得られている局所関数等式の構成法はすべてホマロイダル性を保存することも注目に値する．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　8　件）

① Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki, Archimedean zeta integrals for GL(3)×GL(2), Memoirs of the American Mathematical Society, (受理済み，2019 年発行予定)．査読有.
② Takeyoshi Kogiso, and Fumihiro Sato, Local functional equations attached to the polarizations of homaloidal polynomials, Kyushu Journal of Mathematics, 72(2018), 307～331. DOI: 10.2206/kyushujm.72.307.　査読有.
③ Tadashi Miyazaki, The local zeta integrals for GL(2,C)×GL(2,C), Proceedings of . Japan. Academy., Series. A 94 (2018), 1～6. DOI: 10.3792/pjaa.94.1. 査読有.
④ 佐藤 文広, Hopf mappings and automorphic forms on orthogonal groups, 数理解析研究所講究録 2055 巻，45～54，2017.査読無.
⑤ Tadashi Miyazaki, Whittaker functions on GL(2,C) and the local zeta integrals, Josai Mathematics Monographs, 10(2017), 37~44. 査読無.
⑥ Takeyoshi Kogiso, Fumihiro Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 23(2016), 791～866. 査読有

〔学会発表〕（計　18　件）

① 佐藤 文広, Eisenstein 級数の周期と概均質ゼータ関数，ミニワークショップ“Maass form と Jacobi form”, 2019.
② 佐藤 文広, Local 局所関数等式を満たす多項式系について，ワークショップ「行列解析の展開２」, 2018.
③ 佐藤 文広, Prehomogeneous zeta functions and automorphic forms of orthogonal groups, 4th Kyoto conference on automorphic forms, 2017.
④ 佐藤 文広, Hopf mappings and automorphic forms on orthogonal groups, 研究集会「保型形式とその周辺」, 2017.
⑤ 宮崎 直, Whittaker functions on GL(2,C) and the local zeta integrals, JMM Workshop on Representation theory and differential equations, 2016
⑥ Tadashi Miyazaki, Archimedean zeta integrals for GL(3)×GL(2), 30th Automorphic Forms Workshop, 2016.
⑦ 佐藤 文広,　Gluing prehomogeneous vector space, International Conference“Geometry, Reopresentation theory and Differential Equation”, 2016.
⑧ 佐藤 文広, Zeta functions of Clifford quartic forms and Eisenstein series of orthogonal groups, 3rd Kyoto conference on automorphic forms, 2015.
⑨ 佐藤 文広, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces, “Zeta functions of several variables and applications”, 2015.
⑩ 宮崎 直, Whittaker functions on GL(2,C) and archimedean zeta integrals, Workshop "Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis", 2015.

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：宮崎　直

ローマ字氏名：Miyazaki Tadashi

所属研究機関名：北里大学

部局名：一般教育部

職名：准教授
研究者番号（8 桁）：70632412

(2)研究協力者
研究協力者氏名：谷口　隆（神戸大学・理学研究科・准教授）
ローマ字氏名：Taniguchi Takashi
研究協力者氏名：中筋　麻貴（上智大学・理工学部・准教授）
ローマ字氏名：Nakasuji Maki
研究協力者氏名：伊師　英之（名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授）
ローマ字氏名：Ishi Hideyuki
研究協力者氏名：小木曽　岳義（城西大学・理学部・教授）
ローマ字氏名：Kogiso Takeyoshi
研究協力者氏名：杉山　和成（千葉工業大学・情報科学部・准教授）
ローマ字氏名：Sugiyama Kazunari