様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３５３０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８０１

研究課題名（和文）標数正のDedekind和とその応用

研究課題名（英文）Dedekind sums in positive characteristic and their applications

研究代表者
浜畑　芳紀（Hamahata, Yoshinori）

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：９０２６０６４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：　エータ関数の対数の関数体類似を発見して、その一次分数変換による変換公式を確立した。その変換公式を記述する際、以前に導入したDedekind和を利用して、古典的場合に似た公式を与えた。応用として、Dedekind和の相互法則に別証明を与えた。さらに、関数体上でLambert級数の類似を発見して、その一次分数変換による変換公式を確立した。その変換公式を記述するために、関数体上で一般化Dedekind和を導入して、古典的場合に似た公式を与えた。応用として、一般化Dedekind和の相互法則を確立した。
　上記の研究過程で得られたコタンジェント関数の類似を、関数体上のDirichlet級数に応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
エータ関数の対数の変換公式やLambert級数の変換公式は、保型形式と関係がある。我々の研究成果を関数体上の保型形式に応用すれば、保型形式やDedekind和の結果が得られると推測できるので、意義があると思われる。また、関数体における我々の成果から得たアイデアを有限体に応用して、有限体上でもエータ関数の対数の変換公式やLambert級数の変換公式の類似が得られた。有限体上の数論、特に、保型形式の理論を構築する上で我々の成果は、大きな影響力をもつと思われる。
　Diricchlet級数の1での値がいつ0にならないか、という問題はChowlaの問題と呼ばれ、我々の結果はその成果の一つである。

研究成果の概要（英文）：We introduced an analog of the logarithm of the Dedekind eta function, and established the transformation formula. To describe this, we used the Dedekind sum which was defined before. This formula is similar to the classical formula for the logarithm of the Dedekind eta function. As an application, we obtain another proof of the reciprocity law for our Dedekind sums. Moreover, we introduced an analog of the Lambert series, and established the transformation formula. To describe this, we introduced the generalized Dedekind sum. This formula is similar to the classical formula for the Lambert series. As an application, we established the reciprocity law for the generalized Dedekind sums.
In the above results, we obtained an analog of the cotangent function. Using this function, we obtained an analog of A. Baker, B. Birch, and E. Wirsing's theorem, which is a result for the non-vanishing the Dirichlet series at 1.

研究分野：数論

キーワード：Dedekind和　変換公式　Dirichlet級数　エータ関数　Lambert級数　Dirichlet L-関数　Goss L-関数

１．研究開始当初の背景

(1) １９世紀末にR. Dedekindは、エータ関数と呼ばれる保型形式の変換公式を研究する過程でDedekind和と呼ばれる数論的に重要な有限和を発見し、相互法則を導いた。１９６０年代後半から１９７０年代にかけて、D. ZagierおよびF. Hirzebruchは多様体上の群作用の研究の中で孤立特異点に付随する高次元Dedekind和を発見し、その相互法則を証明した。１９９０年頃からG. Stevens, R. Sczech, D. Solomonは、$GL(2,\mathbf{Q})$の普遍1-コサイクルの研究を始め、1-コサイクルの構成、部分ゼータ関数の特殊値のコホモロジー的解釈、1-コサイクルのDedekind和による表示を与えた。ここで得られたコサイクルの性質から、Dedekind和の相互法則などの性質が導き出される。１９９０年代後半になると、S. Fukuhara は保型形式、一般Dedekind和、周期多項式の３つの空間の間に同型対応があることを示し、Dedekind和、ApostolのDedekind和とEisenstein級数との関係を明らかにした。さらに、これらの同型対応を利用して、保型形式への応用を与えた。近年、東北学院大学の足利正は、代数幾何学に現れる特異点の研究過程で、孤立的とは限らない一般の特異点に付随する高次元Dedekind和を発見し、相互法則、高次元連分数との関係を確立した。これらのDedekind和は保型形式、数論、幾何学、組合せ論の研究手段として広く利用されており、標数正の世界、特に関数体でこの類似を定義してその性質を調べ､様々な分野への応用を考察することは意義のあることであると思われる。Dedekind 和の研究は数論研究者だけでなく、幾何学（代数幾何学、トポロジー）、組み合せ論の研究者も従事している。日本では解析数論研究者、東北大学の代数幾何学グループが研究している。国外には多数の研究者がおり、２００９年にカナダでDedekind和の研究集会が開催された。

(2) 研究開始当初までの、報告者の研究成果について振り返る。１９８９年頃、岡田章三は関数体上でDedekind和を定義して､特別な場合でその相互法則を証明した｡この結果を受けて、Dedekind和の相互法則を完全に示すために研究を開始した。A. Bayadと共同研究を行い、関数体上で岡田章三の定義とは異なるDedekind和を導入して､その相互法則を示した｡さらに、高次元Dedekind和を導入して、その相互法則とKnopp恒等式を示した。この研究で得たアイデアを有限体で用いることを試み､有限体上のDedekind和とその高次元化を定義することに成功して、相互法則を確立することができた。その時点では、岡田章三と我々のDedekind和との関係が不明なままであった。A. Bayad との共同研究で、２つの Dedekind 和との関係について考察した｡まず､関数体上で多重Dedekind和を導入して､その相互法則とKnopp恒等式を示した。この多重Dedekind和は、A. Bayadが有理数体上で定義した多重Dedekind和の類似であり、岡田章三と我々の Dedekind 和を一般化したものである。この結果により、岡田章三の Dedekind和の相互法則を完全に証明することができた。この研究で得たアイデアを有限体で用いることを試み、有限体上の多重Dedekind和を定義することに成功して、その相互法則を確立することができた。また、関数体上の多重Dedekind和を用いて、Goss L-関数の平均値の公式を確立した。

２． 研究の目的

本研究では標数正のDedekind和と保型形式､L-関数との関係を明らかにすることを研究の目的とした。具体的に、次の通りである。

(1) 関数体上の Rademacher 関数を定義して、その合成則を確立すること。

(2) エータ関数の対数の関数体類似を定義して、その一次分数変換による変換公式を、Dedekind 和を用いて確立すること。

(3) Dedekind 和を定義した際に導入した余接関数の類似を関数体上の Dirichlet 級数に応用すること。

代数体と関数体との間の類似性の探究というテーマが古くからある。Dedekind 和の研究という側面からその研究テーマに貢献できるという意味で、本研究は十分に意義があると考えられる。

３．研究の方法

これまでに得た研究成果を手がかりにして、研究を進めた。特に、階数 1 の Drinfeld 加群である Carlitz 加群の理論と関数体上のゼータ関数である Goss ゼータ関数の理論を研究手段として大いに利用した。

上記研究のため、関連する最近の結果、手法を十分知る必要がある。本学において関連する分野の最近の図書は少なく、購読している数学雑誌はごくわずかで、数論関係の数学雑誌は全くない。本応募課題の研究を進めるために、本研究費により数論関係図書、代数幾何関係図書を購入した。

A. Bayad とは、これまで Dedekind 和に関する共同研究を行ってきたが、上記研究に関して得られた成果を連絡して、助言をもらった。通常は、電子メールを介して Dedekind 和の研究連絡を行うが、A. Bayad のいるフランスへ出張して研究打合せを行った。また、国内外の研究集会に出席して、得られた研究成果を発表した。その際に得られたいくつかのコメントは、研究を進めるうえで参考にした。

４．研究成果

(1) Dedekind 和の分数部分の形状を決定した。その結果を用いて、多項式環上の特殊線形群の Rademacher 関数を導入することができた。そして、その合成則を証明した。応用として、Dedekind 和の三項相互法則を確立することができた。

(2) エータ関数の対数の関数体類似を導入して、その一次分数変換による変換公式を確立した。その変換公式を記述する際、以前に導入した Dedekind 和を利用して、古典的場合に似た公式を与えた。応用として、Dedekind 和の相互法則に別証明を与えた。さらに、関数体上で Lambert 級数の類似を導入して、その一次分数変換による変換公式を確立した。その変換公式を記述するために、関数体上で一般化 Dedekind 和を導入して、古典的場合に似た公式を与えた。応用として、一般化 Dedekind 和の相互法則を確立した。これらの成果は、ハンガリーで開催された数論国際会議、韓国で開催された数論国際会議、京都で開催された数論国際会議で公表した。

(3)上記の研究過程で得られたコタンジェント関数の類似を､関数体上の Dirichlet 級数に応用した。Diricchlet 級数の 1 での値がいつ 0 にならないか、という問題は Chowla の問題と呼ばれ、今もなお研究が行われている。特に、A. Baker, B. Birch, E. Wirsing の定理は、画期的な結果である。報告者は、関数体上でその定理の類似を確立した。関数体上では、Chowla の問題に関する研究は進んでおらず、我々の結果はその問題の解決への一歩と言える。

(4)既に触れたように、報告者は有限体上の Dedekind 和の研究を行い、有限体の数論の研究を進めてきた。複素数体では、複素上半平面上の保型形式の理論が発展しており、それに伴い数論の研究が発展した。有限体では、複素上半平面の類似（有限上半平面）が存在しており、その上の保型形式の理論を構築することは重要である。報告者は、有限上半平面上のベクトル値保型形式を導入して、基本理論および具体的例を構成した。応用として、有限上半平面上の同変関数の存在を証明した。この成果は、ノルウェーで開催された有限体国際会議で公表した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 6 件）

1. Yoshinori Hamahata, Fractional parts of Dedekind sums in function fields, Monatsh. Math. 査読有り 180 (2016), 549-562. 10.1007/s00605-015-0781-0

2. Yoshinori Hamahata, Dedekind sums and the transformation in function fields, Int. Number Theory 査読有り 12 (2016), 2061-2072. 10.1142/S1793042116501232

3. Yoshinori Hamahata, Generalized Dedekind sums and transformation formulae in function fields, J. Number Theory 査読有り 173 (2017), 272-292. 10.1016/j.int.2016.09.017

4. Yoshinori Hamahata, Generalized Dedekind sums and the transformation formula in finite fields, Finite Fields Appl. 査読有り 49 (2018), 49-61 10.1016/j.ffa.2017.09.005

5. Yoshinori Hamahata, Chowla’s theorem over function fields, Int. Number Theory 査読有り 14 (2018), 1689-1698 10.1142/S1793042118501026

6. Yoshinori Hamahata, Vector-valued modular forms on finite upper half planes, 査読有り
LNCS 11321 (2018), 175-187 10.1007/978-3-030-05153-29

〔学会発表〕（計 4 件）

1. Yoshinori Hamahata, The transformation of a series in function fields, 29th Journees Arithmetiques, 2015.

2. Yoshinori Hamahata, The transformation of a series in function fields, Pure and Applied Number Theory Summer School, 2016.

3. 浜畑芳紀、The transformation of a series in function fields, 解析数論研究集会、2015.

4. Yoshinori Hamahata, Vector-valued modular forms on finite upper half planes, International Workshop on the Arithmetic of Finite Fields, 2018.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者　　なし
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者　なし
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。