

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 10 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04807

研究課題名(和文) 超幾何系由来のK3保型形式の研究とその数論への応用

研究課題名(英文) Study on K3 modular forms derived from hypergeometric systems

研究代表者

志賀 弘典 (Shiga, Hironori)

千葉大学・大学院理学研究院・名誉教授

研究者番号：90009605

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：19世紀のガウス、アーベル、ヤコビによって建設された、楕円曲線の周期および、モジュライの理論とその数論への応用は、20世紀の数学に多大な影響を及ぼしたが、今日、その理論は高次元の数学に拡張されて研究が続けられている。楕円曲線の複素2次元版がK3曲面であり、さらに高次のもはカラビーヤウ多様体と呼ばれる。

他方、1901年、ヒルベルトによって提起された、彼の第12問題は数論に関わる重要な問題であり、1960年代の志村五郎による大きな展開があったが、まだ未解決である。

研究代表者は、K3曲面等を介して、志村の結果を可視化し明示的な例を与えることに成功した。

研究成果の概要(英文)：In the 19th century, Gauss, Abel and Jacobi constructed the theory of elliptic curves and their moduli. It had a big influence in mathematics of 20th century. At present, it is developed to the higher dimensional analogues. The K3 surface is the 2-dimensional analogue of the elliptic curve.

On the other hand, Hilbert proposed his 12th problem in 1901, it was an important proposal in number theory. In 1960's, Shimura gave a big contribution for this problem. But the Hilbert 12th problem itself is still open. In our research project, we could give a visualization of Shimura's theory and constructed a series of explicit examples.

研究分野：数学とくに代数学

キーワード：K3曲面 保型関数 超幾何微分方程式 虚数乗法論

1. 研究開始当初の背景

近年になって、K3 モジュラー関数（あるいは Calabi-Yau 多様体族のミラー写像ともいう）の研究は内外において、また、数学者および物理学者のあいだで盛んになりつつある。一方、K3 曲面自身の研究も急速に進展しており、様々な興味深い特殊 K3 曲面族が発見されつつある。

このように、国内外の環境は K3 モジュラー関数のより綿密な研究を開始すべき条件を整えつつあると考えられた。

2. 研究の目的

本プロジェクトは、“さまざまな K3 曲面族から、超幾何微分方程式の観点の下で特殊多変数モジュラー関数を導き、その応用として各種の数論の問題に接近する”ことを目指すものである。

3. 研究の方法

上記のテーマには以下のような幾つかの異なった接近が考えられる。

(1) この研究テーマにおける“良い K3 曲面族”とは何かを設定し、各々の族の代数幾何学的性質を研究すること。ホッジ構造の変形族として、興味深い他の代数多様体の族（ある種のアーベル曲面族というような）と一致する K3 曲面族の発見が期待される。

(2) K3 曲面族の粗なモジュラー空間内に現れる志村多様体（あるいは志村曲線）を研究すること。このようにして得られる部分空間上の保型関数を、既知の手段を援用してより精緻に研究すること。

(3) さまざまな多変数モジュラー関数の特殊値の代数性あるいは無理性を、Abel 多様体の虚数乗法論 (G. Shimura の高次虚数乗法論が基本文献) と結びつけて論じること。

4. 研究成果

[一般概要] 19世紀のガウス、アーベル、ヤコビによって建設された、楕円曲線の周期および、モジュライの理論とその数論への応用は、20世紀の数学に多大な影響を及ぼしたが、今日、その理論は高次元の数学に拡張されて研究が続けられている。楕円曲線の複素 2次元版が K3 曲面であり、さらに高次ものはカラビーヤウ多様体と呼ばれる。他方、1901 年、ヒルベルトによって提起された、彼の第12問題は数論に関わる重要な問題であり、1960 年代の志村五郎による大きな展開があったが、現在もまだ未解決である。研究代表者は、K3 曲面等を介して、志村の結果を可視化し明示的な例を与えることに成功した。

[成果概説] 本プロジェクトは、“特殊 K3 曲面族から超幾何的観点の下で多変数モジュラー関数を導く”こと、さらには、その保型関数の数論への応用を示すこと、付け加えて、その周辺に位置する興味深い特殊現象を追求すること、を研究目的としていた。これに照らしてみると、

(1) 2次元アーベル多様体のモジュライ空間として現れる 3次元ジークル上半空間とジークル・モジュラー群の対を、ある種の楕円型 K3 曲面族のモジュライ空間と、その超越格子に関する直交群の対と見立てて、その保型関数をテータ表示し、この空間に埋め込まれている判別式 5 のヒルベルト・モジュラー空間をパラメータ空間上で明示する結果を得た。

(2) 竹内喜佐雄によって得られている、18種のコンパクト型三角群に関するモジュラー関数は、志村五郎による高次虚数乗法論を具体的に実現する重要な意味を有している。この枠組でヒルベルト第12問題への接近、すなわ

ち高次虚数乘法体の絶対類体の構成、を図るには、モジュラー関数を明示し、さらに志村の正準模型を確定する必要がある。研究代表者は、超幾何微分方程式由来の保型関数をテータ表示することによって、この課題を達成した。

(3) 江戸時代の和算に発する幾何学の問題を展開して、 $K3$ 曲面の整数点の問題を見出し、古典的な“合同数”の研究に結びつけて、これを解決した。

[成果報告] 上記 (1) に関わるものは、論文④である。ここでは、 $K3$ 曲面でその超越格子が $U \oplus U \oplus \langle -2 \rangle$ となるものを集めた、いわゆる“格子型 $K3$ 曲面族”がアーベル曲面から生じるクンマー曲面族とホッジ同型となり、現れる $K3$ 曲面は容易なパラメータで定まる楕円型 $K3$ 曲面である。この曲面族のパラメータ空間は重み付き3次元射影空間 $P(2, 3, 5, 6)$ で、簡易なコンパクト化を有する。さらに、そのパラメータは井草準一によるテータ不変量で具体的に記述されることを示した。基本となるアイデアは、通常、正則 1-形式の 1-サイクル上の積分でアーベル曲面の周期を考えるが、これを、正則 2-形式の 2-サイクル上の積分に移し、対応する 2-サイクルの交点形式を計算すると、上記の格子が現れることを出発点にしている。

さらに、このときに現れるモジュライ空間内で、判別式 5 の実乘法を持つアーベル曲面族とホッジ同型な $K3$ 曲面族が決定され、パラメータ空間でこれに対応する超曲面が明示的に記述されることも示した。対応して、ここではヒルベルト保型形式がテータ関数で表示される。

上記 (2) に関わるのは論文①②③ 講演①②③である。1977 年に竹内喜佐雄が列挙した数論的三角群は 85 個あり、それらは 19 種の通約可能類に分類され、そのうちの 1 つは非コンパクト型、他の 18 種がコンパクト型である。これら 18 種中 16 種では、各々はガウス超幾何微分方程式のモノドロミー群から現れる三角群となる。これは、複素上半平面に描かれた非ユークリッド三角形の偶数回の折り返しの群であり、したがって、対応する微分方程式から出発すれば、そのシュワルツ写像の逆写像として、竹内の三角群に関する、複素上半平面で定義された保型関数が得られる。

数論的三角群には各々ある総実な数体 F 上の 4 元数環が対応し、その 4 元数環 B の志村の意味の“単数群”と三角群とが、通約可能となる。一方、 F 上の虚 2 次拡大として与えられる虚数乘法体 M は F の判別式で与えられるある条件を満たすとき、 B 内に

(部分環として)同型に埋め込まれる。志村五郎の高次虚数乘法論の特殊ケースとして、上記の M の絶対類体が、対応している数論的三角群の保型関数 $f(z)$ の特殊値添加から得られることが知られている。上半平面をこの三角群で割った商空間は F 上定義されたりーマン球面 P となることも示されている。このときの組 $(f(z), P)$ を志村の正準模型という。

この意味の志村の正準模型が正確に決定された例はこれまで知られていなかったが、この一連の研究によって、その構成法が与えられ、テータ関数によって表示された具体例も与えられた。これを用いて、高次ヒルベルト類体

の例示を近似計算で与えることも可能となった。また、論文②、講演③では、判別式 6 の有理数体上の 4 元数環の場合を論じた。これは、上の考察で除かれた、三角群にならない場合で、対応する志村の意味の単数群は指数 (2, 2, 3, 3) の四角群になる。この場合の志村正準模型の決定は、対応するリーマン球面が実数点を持たないことから、より難しくなるが、栗原章による先行研究の成果を踏まえて、決定に成功した。

(3)に関わる発表としては、講演②における集中講義の一環として紹介された。

これは、ある特別なクンマー曲面上の有理数点を列挙する問題に還元され、さらにその問題は、ある合同数(有理数辺直角三角形の面積となる自然数) N とそれに対応する合同数方程式

$y^2 = x^3 - N^2x$ の有理数解 (x, y) を用いて記述されることが示された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)
〔雑誌論文〕(計 4 件)

① H. Shiga, “One visualization of Shimura’s complex multiplication theorem via hypergeometric modular functions”(Joint work with A. Nagano), RIMS Kokyuroku Bessatsu (2015 研究集会「代数的整数論とその周辺」報告集, in print).(査読あり)

② H. Shiga, “The Shimura canonical model for a quaternion algebra of discriminant 6 via the hypergeometric modular function”, RIMS Kokyuroku Bessatsu (2016 研究集会

「代数的整数論とその周辺」報告集, in print).
(査読あり)

③ A. Nagano and H. Shiga, “To the Hilbert class field from the hypergeometric modular function”, J. Number Theory, 165 (2016), 408 – 430. (査読あり)

④ A. Nagano and H. Shiga, “Modular maps for the family of abelian surfaces via K3 surfaces”, Math. Nachrichten ,288 (2015), 89 –114.(査読あり)

〔学会発表〕(計 4 件)

① H. Shiga, An explicit Shimura canonical model for the quaternion algebra of discriminant 6, 第 30 回 Journées Arithmétiques, Caen (フランス), 2017 年 7 月 3 日 ~ 7 日.

② H. Shiga, “To the Hilbert 12th problem via the hypergeometric modular function”(joint with Atsuhira Nagano (KCL)), 研究集会 Arithmetic and Low Dimensional Hyperbolic Spaces (Galatasaray 大学 (イスタンブール、トルコ)), 2016 年 6 月 27 日 ~ 7 月 1 日.

③ H. Shiga, “To the Hilbert 12th problem via the hypergeometric modular function” (joint with Atsuhira Nagano (KCL)), 研究集会 Automorphic form theory and computation (Kings ’College London(イギリス), 2016 年 9 月 5 日 ~ 9 月 9 日)

④ H. Shiga, “Period map, Picard modular forms and Complex multiplication of higher degree (Geometrical Applications of Modular Forms of Several Variables)”, 2015 年 11 月 7 日, 18th

Autumn Workshop on Number Theory at
Hakuba(日本、白馬村国際 シンポジウム).

〔図書〕(計 1 件)

④ 志賀弘典、『保型関数』、共立出版 (2017),
273 ページ.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

志賀 弘典 (SHIGA Hironori)

千葉大学・理学研究院・名誉教授

研究者番号：90009605

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：

(4)研究協力者

()