

令和元年5月30日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04810

研究課題名(和文) 有理的連結多様体の導来圏の半直交分解とベクトル束

研究課題名(英文) Semi-orthogonal decomposition of derived categories of rationally connected varieties and vector bundles

研究代表者

大野 真裕 (Ohno, Masahiro)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：70277820

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：以下、標数0の代数閉体上で考える。まず、非特異2次曲面上の第1チャーン類が(2, 1)となるネフなベクトル束を分類した。それらは全部で5種類あり、特に大域生成であることを示した。次に、射影空間上の第1チャーン類が3のネフなベクトル束を分類した。ここで、それらの第2チャーン類は0以上9以下であることを注意する。特に、第2チャーン類が7以下ならばそれらは大域生成であること、第2チャーン類が8のときは大域生成とはならず、射影平面上でのみ存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ベクトル束の性質に、大域生成と呼ばれる幾何学的な性質と、ネフ(nef, 数値的半正)と呼ばれる数値的な性質がある。一般に、大域生成ならばネフだが、この逆は成り立たない。一方、不変量等の数値的な条件から幾何学的状況をどれだけ回復できるか？という観点から、どのような条件のもとでネフならば大域生成がわかるか？は興味を持たれるところである。本研究の研究成果は特にこの観点からの学術的意義があると考えている。

研究成果の概要(英文)：We work over an algebraically closed field of characteristic zero. First we classified nef vector bundles on a smooth projective quadric surface with first Chern class (2,1). They consist of 5 types of vector bundles and they are all globally generated. Second we classified nef vector bundles on a projective space with first Chern class three. Note here that in this case the second Chern class is non-negative and less than or equal to nine. We showed in particular that if the second Chern class is less than or equal to seven, then they are all globally generated, and that if the second Chern class is eight, then they are not globally generated and they exist only on a projective plane.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ベクトル束 ネフ 大域生成

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

$n$  次元非特異射影多様体  $X$  上のベクトル束について、種々の観点から国内外で研究されていた。その中の一つに、階数  $r$  の豊富なベクトル束  $E$  の随伴束  $K_X + \det E$  の性質による分類問題がある。例えば、「随伴束  $K_X + \det E$  が構造層と同型なとき、 $(X, E)$  の組を分類せよ」という問題がある。1990 年前後に、森理論を使って、 $r=n+1$  の場合から始めて、 $r=n$  の場合、 $r=n-1$  の場合と、Ye-Zhang, Peternell, Fujita, Peternell-Szurek-Wisniewski によって分類されていたが、 $r=n-2$  の場合は、研究開始当初には分類されていなかった。 $r=n-1$  の場合の Peternell-Szurek-Wisniewski による分類では、 $X$  が射影空間や 2 次超曲面のとき、まず、 $E(-1)$  がネフであることを示し、次に、第 1 チャーン類が小さいネフなベクトル束の分類問題に帰着させて分類していた。特に、Peternell-Szurek-Wisniewski は、端射線に伴う射を解析することなどを通して、射影空間上の第 1 チャーン類が 2 以下のネフなベクトル束と、2 次超曲面上の第 1 チャーン類が 1 以下のネフなベクトル束を、ベクトル束の階数によらずに、分類していた。研究代表者は、 $r=n-2$  の場合の分類のためにも、次の場合、つまり、射影空間上の第 1 チャーン類が 3 のネフなベクトル束の分類や、2 次超曲面上の第 1 チャーン類が 2 のネフなベクトル束を、階数によらずに分類したいと考えていたが、どのように記述することで分類すれば良いかが長い間不明であった。

その後、研究代表者は、非特異射影多様体の有界導来圏の半直交分解などを知るに及んで、研究開始当初には、Bondal の定理に基づいて、射影空間や 2 次超曲面などの、ある種の有理的連結多様体上では、川又-Viehweg 消滅定理などとともに、完備な強い意味での例外ベクトル束列を使って記述することで、第 1 チャーン類が小さいネフなベクトル束の分類ができるかもしれないと考えていた。一方、その時点では、

(1) 射影空間内の非特異 2 次超曲面上のネフなベクトル束の分類問題について、Peternell-Szurek-Wisniewski の分類の別証明を、非特異 2 次超曲面上の完備な強い意味での例外ベクトル束列を使って、与えただけで、それ以上のことは何もわかっていなかった。

(2) 射影空間内上のネフなベクトル束の分類問題について、Peternell-Szurek-Wisniewski の分類の別証明を、射影空間上の完備な強い意味での例外直線束列を使って、与えただけで、それ以上のことは何もわかっていなかった。

### 2. 研究の目的

A. Kuznetsov は、非特異射影多様体の有界導来圏の「Lefschetz 分解」と呼ばれる半直交分解を定義した。これは、射影空間の有界導来圏のある種の半直交分解を一般化した概念で、有理的連結多様体やその超平面切断の有界導来圏に対して有効な概念と考えられる。

本研究の目的は、有理的連結多様体  $X$  の導来圏の半直交分解を調べ、さらに、それを用いて、 $X$  上のベクトル束を記述することであった。

### 3. 研究の方法

研究分担者の寺川宏之氏とはほぼ毎週セミナーをおこなっていたので、それを続けることとし、また、実際、続けた。また、導来圏と関連した事項では、しばしば代数的トポロジーに背景や由来がある場合があるので、代数的トポロジーの専門家の山口耕平氏に研究分担者として加わっていただき、研究をすすめた。研究集会等々で、関連した話題の講演を聴くのは、ヒントを得るためにも、長期的な展望、方向性を感じ、最新の結果を知るためにも、欠かせない。そのための研究出張をおこなうことで研究をすすめた。

数学的には、研究開始時点で、射影空間上や 2 次超曲面上のネフなベクトル束に対し、完備な強い意味での例外ベクトル束列による局所自由分解で、直和因子の数 (Betti 数に相当するもの) 等で、第 1 チャーン類に依存した評価式を用いたものを得ていたが、この一般的な局所自由分解は、極小なものではなかったため、ネフなベクトル束の個々の不変量に基づいて、極小なものにするためには、どうしたらいいかを考えるということが、具体的な方針であった。

### 4. 研究成果

以下、標数 0 の代数閉体上で考える。

(1) 射影空間内の非特異 2 次曲面の有界導来圏の半直交分解を用いて、射影空間内の非特異 2 曲面上の第 1 チャーン類が  $(2, 1)$  のネフなベクトル束の分類を与えた。分類の結果、それらは大域生成であることが示された。

射影空間内の非特異 2 次曲面上では、Peternell-Szurek-Wisniewski によって、第 1 チャーン類が  $(1, 1)$  のネフなベクトル束は分類されていた。この結果は彼らの結果を一步すすめたものである。第 1 チャーン類が  $(1, 1)$  のときは、対応する射影空間束は、ファノ多様体となるが、 $(2, 1)$  のときは、対応する射影空間束は必ずしもファノ多様体とはならず、この点に大きな違いがある。証明の方針も、Peternell-Szurek-Wisniewski のものとは異なる。

(2) 射影空間上の第 1 チャーン類が  $d$  のネフなベクトル束で、 $d-1$  次の直線束を部分束にもつものの分類を与えた。

(3) 射影空間上の第1チャーン類が3のネフなベクトル束を、完備な強い意味での例外直線束列による極小局所自由分解を与えることで、20通りに分類した。この場合、第2チャーン類は0以上9以下であるが、特に

- ① 第2チャーン類が7以下であれば大域生成になることを示した。
- ② 第2チャーン類が8なら大域生成にならず、射影平面上にのみ存在することを示した。
- ③ 第2チャーン類が9のときは、大域生成になる場合も、大域生成にならない場合もある。
- ④ 第2チャーン類が9になる場合は、全部で6通りあるが、そのうちの3通りで、実際に例があるのかどうか不明である。
- ⑤ 第2チャーン類が9で、1次のコホモロジーが0になる場合に、その存在が不明な場合がある。

この結果は、Peternell-Szurek-Wiśniewskiによる、第1チャーン類が2のネフなベクトル束の分類を一步すすめたものである。また、Anghel-Manolache(2013)とSierra-Ugaglia(2014)による第1チャーン類が3の大域生成なベクトル束の分類を、ネフなベクトル束の分類に一般化したものである。さらに、A. Langerの1998年の論文には、2次元と3次元の射影空間上の階数2のネフかつ巨大なベクトル束で第1チャーン類が3のもの分類が含まれていたが、その部分を任意の次元、任意の階数の場合に、一般化したものでもある。当初の見込みでは、第2チャーン類が9の場合には、1次のコホモロジーの消滅がいえないので、1次のコホモロジーが消えない場合が難しくなるだろうと考えていたが、予想に反して、1次のコホモロジーが消える場合で、さらに、次数が1の直線束を部分層に含む場合のほうが、存在、非存在がはっきりしないことになった：射影平面上の、第1チャーン類が2、第2チャーン類が7で、階数が2の、局所自由ではないが、ねじれない層が、第1チャーン類が3のネフなベクトル束の商になりうるのか？がはっきりしない。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9件)

- ① [Masahiro Ohno](#), Nef vector bundles on a projective space with first Chern class three, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 掲載決定, 査読有, 2019, DOI: 10.1007/s12215-019-00412-5
- ② [Masahiro Ohno](#), Nef vector bundles on a quadric surface with the first Chern class (2,1), *Adv. Geom.* 掲載決定, 査読有, 2019, DOI: 10.1515/advgeom-2018-0039
- ③ A. Kozłowski, [K. Yamaguchi](#), The homotopy type of spaces of rational curves on a toric variety, *Topology Appl.*, 査読有, 249巻, 2018, pp. 19--42, DOI: 10.1016/j.topol.2018.06.006
- ④ [K. Yamaguchi](#), Note on the spaces of real resultants with bounded multiplicity, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 2018, 2098巻, pp. 98-103
- ⑤ [Masahiro Ohno](#), Nef vector bundles on a projective space with first Chern class 3 and second Chern class 8, *Le Matematiche*(Catania), 査読有, 72巻, 2017, pp. 69-81, DOI: 10.4418/2017.72.2.5
- ⑥ A. Kozłowski, [K. Yamaguchi](#), The homotopy type of spaces of resultants of bounded multiplicity, *Topology Appl.*, 査読有, 232巻,
- ⑦ A. Kozłowski, [K. Yamaguchi](#), The homotopy type of spaces of polynomials with bounded multiplicity, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ*, 査読有, 52巻, 2016, pp. 297-308, DOI: 10.4171/PRIMS/182
- ⑧ A. Kozłowski, [K. Yamaguchi](#), The homotopy type of spaces of coprime polynomials revisited, *Topology Appl.*, 査読有, 206巻, 2016, pp. 284-304, DOI: 10.1016/j.topol.2016.03.033
- ⑨ [寺川宏之](#), Triangulated categories V: Glueing t-structures, *都留文科大学研究紀要*, 査読無, 84巻, 2016, pp. 145-154

[学会発表] (計 12件)

- ① [大野真裕](#), 射影空間上の第1チャーン類が3のネフなベクトル束について, *農工大数学セミナー*2019, 2019

- ② Masahiro Ohno, Nef vector bundles on a projective space with first Chern class three, International Congress of Mathematicians, Short Communications, 2018
- ③ 山口耕平, Real analogues of spaces of resultants and its related problems, RIMS 共同研究 (公開型) 研究集会「変換群における幾何・代数・組み合わせ論」, 2018
- ④ 山口耕平, The homotopy of spaces of resultants of bounded multiplicity, 研究集会「福岡ホモトピー論セミナー」, 2018
- ⑤ 山口耕平, Spaces of resultants with bounded multiplicity and its real analogues, 研究集会「実特異点とその応用」, 2018
- ⑥ 山口耕平, The topology of spaces of rational curves on a toric variety and related problems, 岡山大学理学部談話会, 2018
- ⑦ 山口耕平, Spaces of resultants of bounded multiplicity and its related problems, 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」, 2017
- ⑧ 山口耕平, The problems of spaces of resultants related to rational curves on a toric variety, 京都大学数学教室「代数トポロジーセミナー」, 2017
- ⑨ 山口耕平, The homotopy of spaces of rational curves on a toric variety, 研究集会「群作用と位相」, 2016
- ⑩ 大野真裕, 射影空間上と2次曲面上の第1チャーン類が小さいネフなベクトル束について, 都の西北代数幾何学セミナー, 2016
- ⑪ 大野真裕, 射影空間上の第1チャーン類が3のネフなベクトル束について, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2016」, 2016
- ⑫ 山口耕平, レゾルタントのホモトピー型と関連する話題について, 京都大学大学院理学研究科/理学部 数学教室談話会, 2016

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：寺川 宏之

ローマ字氏名：(TERAKAWA, Hiroyuki)

所属研究機関名：都留文科大学

部局名：教養学部

職名：教授

研究者番号 (8桁)：80277863

研究分担者氏名：山口 耕平

ローマ字氏名：(YAMAGUCHI, Kohhei)

所属研究機関名：電気通信大学

部局名：大学院情報理工学研究科

職名：教授

研究者番号 (8桁)：00175655

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。