

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04814

研究課題名(和文)表現のモジュライとその周辺(3)

研究課題名(英文)Moduli of representations and related topics (3)

研究代表者

中本 和典 (NAKAMOTO, Kazunori)

山梨大学・大学院総合研究部・教授

研究者番号：30342570

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：2次の各鑄型の表現のモジュライの構成について、学術論文として公表した。自由モノイドに関する2次表現の各鑄型に対する位相幾何学な性質についての結果を鳥居猛氏(岡山大学)との共著論文として公表した。thick表現とdense表現という特別な既約表現に関する基本的な結果に関してまとめた、面田康裕氏(明石高専)との共著論文を公表した。鳥居氏との共同研究により、行列環の部分代数のモジュライの構成を調べるためにHochschild cohomologyを応用できることが判明し、3次行列環の部分代数に対して具体的なHochschild cohomologyの計算を行った。順次論文執筆、投稿する予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

行列は基本的な代数的対象であり、複数個の行列を同時に分かりやすい標準型に変形することは、数学のさまざまな分野に多くの応用が考えられ有益である。群やモノイドといった代数的構造をもつ集合を行列に表現することは古くから考えられ、1つの表現(の同値類)を1点とするような幾何学的対象(表現のモジュライ)を調べることが本研究のテーマである。行列環の部分代数Aに対して、像が生成する部分代数がAに一致するような表現を集めると、Aに対する表現のモジュライが作られるであろうと予想し、実際に構成するのが本研究の目的である。今回、2次の表現のモジュライや3次の行列環の部分代数のモジュライに関する豊富な結果が得られた。

研究成果の概要(英文)：The paper on the construction of the moduli of representations of degree 2 for each mold has been published. We published the paper on topological properties of the moduli of representations with each mold of degree 2 for free monoids (joint work with Takeshi Torii(Okayama University)). We also published the paper on basic results on thick representations and dense representations, which are special types of irreducible representations (joint work with Yasuhiro Omoda(National Institute of Technology, Akashi College)). As a collaboration with Takeshi Torii, we see that we can apply Hochschild cohomology to the moduli of subalgebras of the full matrix ring. We calculated Hochschild cohomology for each subalgebra of the full matrix ring of degree 3. These results will be announced.

研究分野：数学・代数学

キーワード：代数学 代数幾何学 不変式論 表現のモジュライ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究は、研究代表者が若手研究(B)「表現のモジュライとその周辺」(2007年度~2010年度、研究課題番号:19740007)や基盤研究(C)「表現のモジュライとその周辺(2)」(2011年度~2014年度、研究課題番号:23540044)において行った研究の続きにあたる。「鑄型」とは、平たく言えば全行列環の部分代数のことである。を群もしくはモノイドとする。の n 次表現を()が生成する n 次全行列環の部分代数 A で分類することを考える。部分代数(以下、鑄型と呼ぶ) A を生成するような表現に限ってモジュライを構成しようというのが研究代表者のアイデアである。

研究開始当初、自由群や自由モノイドに対する2次または3次の表現のモジュライの virtual Hodge polynomial や Zeta 関数が、海外では S. Lawton や V. Muñoz などにより計算され、国内では鳥居猛氏(岡山大学)と研究代表者が自由モノイドの2次表現の場合を計算したばかりであった。これらの計算の手法は、表現のモジュライを分割して、各 stratification における有理点の個数を計算するものである。ただ、我々の手法は、有理点の個数を単純に計算するのみでなく、これら stratification にモジュライ問題の解としての幾何学的な意味づけをつけている点の特徴となっている。3次以上の鑄型については、対応する表現のモジュライの構成と、その具体的な構造の解明が完了していない状況であった。

一方、群の n 次表現 : $GL(V)$ が thick とは、 V の任意の部分空間 V_1, V_2 で $\dim V_1 + \dim V_2 = n$ ならば、の元 g が存在して、 $(g)V_1 \cap V_2 = \{0\}$ となるときをいう。thick な表現は既約表現であることがわかる。面田康裕氏(明石高専)との共同研究で、複素単純 Lie 群の有限次元複素 thick 表現の分類が完了していた。

2. 研究の目的

表現のモジュライを「鑄型」や「thick」という観点からとらえ、3次以上の各鑄型をもつ表現のモジュライをスキームとして構成し、その構造を代数幾何学的、不変式論的、代数的位相幾何学的方法で解明する。他の分野にも密接にかかわる基本的かつ重要な「表現のモジュライ」という数学的対象を構成・解明することにより、今後の数学の進展に貢献したい。

研究開始当初の目的は次の通りであった。

- (1) 3次以上の各鑄型に対する表現のモジュライの構成。これは次の問題(2)とも関連し、各 stratification の代数幾何学的な意味づけとなる。
- (2) 絶対既約表現のモジュライの polynomial count 性(有理点の個数が多項式で表されるという性質)の決定。また、モジュライの代数的位相幾何学的な性質を解明する。与えられた群やモノイドに対し、絶対既約表現のモジュライが(strongly) polynomial count であるかについて、その条件を記述する。鳥居猛氏(岡山大学)との共同研究。
- (3) thick または dense な表現に関する研究。具体的な有限群 G の既約表現に対し、thick または dense かどうか調べる(たとえば対称群)。また、具体的な群(たとえば自由群)の non-thick な絶対既約表現のモジュライの記述。面田康裕氏(明石高専)との共同研究。
- (4) 行列の不変式環の構造について、そのポアンカレ級数や退化したポアンカレ級数の決定を、奥山真吾氏(香川高専)と共同で PC を使って行う。7次の行列2個の不変式環の退化したポアンカレ級数を決定したい。

3. 研究の方法

当初の研究の手法は次の通りである。なお、実際には優先順位を変えて研究を行った。

- (1) 3次の鑄型に対する表現のモジュライを構成する。
3次の鑄型が26種類存在する結果および3次の鑄型のモジュライの記述に関して論文にまとめる。その後、各鑄型に対する表現のモジュライを有理整数環 Z もしくは $Z[1/2], Z[1/3]$ などの環上のスキームとして構成する。順次論文を執筆していく。
- (2) 絶対既約表現のモジュライの polynomial count 性について調べる。
鳥居猛氏(岡山大学)との共同研究。Lawton, Mozgovoy, Reineke などの結果を検証しながら、さまざまな群やモノイドの polynomial count 性が成立するかどうかを判定する。
- (3) thick または dense な表現に関する研究。
面田康裕氏(明石高専)との共同研究。今までに記述できなかった結果について、順次論文にまとめていく。具体的な対称群の表現が thick または dense かどうか判定する。
- (4) 7次正方向列2個の不変式環の退化したポアンカレ級数の計算。
奥山真吾氏(香川高専)との共同研究。退化したポアンカレ級数を PC で計算する。

4. 研究成果

研究当初とは大きく目的を変えた形となった。理由として、海外の研究者の研究が盛んで指標多様体の E-polynomial の計算が大幅に進み、後塵を拝した感があることが挙げられる。また、投稿論文が掲載受理されるまでに予想より時間がかかった。さらに、行列環の部分代数のモジュライの構造を調べるために Hochschild cohomology が応用できるという、より重要度の高い新たな知見が得られたことで優先順位を変えたことが理由である。

- (1) 2 次の各鑄型の表現のモジュライの構成について、学術論文として公表した。自由モノイドに関する 2 次表現の各鑄型に対する位相幾何学な性質についての結果を鳥居猛氏(岡山大学)との共著論文として公表した。これらの結果により、2 次表現に対する各鑄型のモジュライ構成問題は解決された。
- (2) thick 表現と dense 表現という特別な既約表現に関する基本的な結果に関してまとめた、面田康裕氏(明石高専)との共著論文を公表した。投稿論文が掲載受理になるまで相当時間がかかってしまった。thick 表現や dense 表現は我々が生み出した概念であるが、これでようやく thick 表現の理論がスタートすることとなった。
- (3) 鳥居氏との共同研究により、行列環の部分代数のモジュライの構造を調べるために Hochschild cohomology を応用できることが判明した。具体的には、部分代数のモジュライの接空間の次元が 1 次 Hochschild cohomology で計算でき、部分代数のモジュライの各点の smoothness が 2 次 Hochschild cohomology を使って記述できることがわかった。また、部分代数のモジュライの PGL 軌道が開であるための十分条件が 1 次 Hochschild cohomology が消えることで与えられることもわかった。さらに、3 次行列環の部分代数に対して具体的な Hochschild cohomology の計算を行った。これらの結果については、環論および表現論シンポジウム報告書(鳥居氏との共著)として、
“The moduli of subalgebras of the full matrix ring of degree 3”
“An application of Hochschild cohomology to the moduli of subalgebras of the full matrix ring”
に記載しており、共著論文 “Applications of Hochschild cohomology to the moduli of subalgebras of the full matrix ring” として投稿する予定である。これらの結果は、部分代数のモジュライを記述する際に役立つだけでなく、各鑄型に対する表現のモジュライの構成に大きく貢献する。また、Gabriel の意味での the variety of n-dimensional algebras とも密接な関係があり、今後の研究の進展によってはそちらの分野への影響が考えられる。
- (4) その他、下記の共著論文を公表した。
Kazunori Nakamoto, Ayse Sharland, and Meral Tosun “Triple root systems, rational quivers and examples of linear free divisors”
H. Johno, K. Nakamoto, and T. Saigo “Remarks on kernel Bayes’ rule”

今回成果がまとまらなかった研究内容については、基盤研究(C)「表現のモジュライとその周辺(4)」(2020年度~2023年度、研究課題番号:20K03509)で継続される予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Nakamoto Kazunori and Omoda Yasuhiro	4. 巻 42
2. 論文標題 Thick representations and dense representations I	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 274 ~ 307
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.2996/kmj/1562032831	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Johno Hisashi, Nakamoto Kazunori, Saigo Tatsuhiko	4. 巻 5
2. 論文標題 Remarks on kernel Bayes' rule	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Cogent Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 19 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/23311835.2018.1447220	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kazunori Nakamoto	4. 巻 57
2. 論文標題 The moduli of representations of degree 2	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 829 ~ 902
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2017-0017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazunori Nakamoto, Ayse Sharland, and Meral Tosun	4. 巻 29
2. 論文標題 Triple root systems, rational quivers and examples of linear free divisors	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 29 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X18500179	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazunori Nakamoto and Takeshi Torii	4. 巻 39
2. 論文標題 Virtual Hodge polynomials of the moduli spaces of representations of degree 2 for free monoids	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 80 ~ 109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj/1458651693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 鳥居猛、中本和典
2. 発表標題 An application of Hochschild cohomology to the moduli of subalgebras of the full matrix ring M_n
3. 学会等名 第8回日中韓環論国際シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鳥居猛、中本和典
2. 発表標題 An application of Hochschild cohomology to the moduli of subalgebras of the full matrix ring M_n
3. 学会等名 日本数学会代数学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中本 和典
2. 発表標題 Hochschild cohomologyの計算例と行列環の部分代数のモジュライへの応用
3. 学会等名 第47回神楽坂代数セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中本 和典
2. 発表標題 The moduli of 4-dimensional subalgebras of M_3
3. 学会等名 「非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺」高知小研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鳥居猛, 中本和典
2. 発表標題 An application of the moduli of subalgebras of the full matrix ring
3. 学会等名 第51回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鳥居猛, 中本和典
2. 発表標題 3次行列環の部分代数のモジュライ(2)
3. 学会等名 日本数学会代数学分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鳥居猛, 中本和典
2. 発表標題 An application of the moduli of subalgebras of the full matrix ring
3. 学会等名 日本数学会代数学分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鳥居猛, 中本和典
2. 発表標題 The moduli of subalgebras of the full matrix ring of degree 3
3. 学会等名 第50回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 城野悠志, 中本和典
2. 発表標題 決定木を用いた確率分布間のoverlap の計算
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会統計数学科分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中本和典
2. 発表標題 Two-dimensional traceless representations in characteristic 2
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会代数学分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鳥居猛, 中本和典
2. 発表標題 3次行列環の部分代数のモジュライ(1)
3. 学会等名 日本数学会2017年度年会代数学分科会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

山梨大学 教員情報検索
<http://nerdb-re.yamanashi.ac.jp/Profiles/322/0032156/profile.html>
山梨大学医学部総合医科学センター[数学]
<https://www.med.yamanashi.ac.jp/medicine/mathematics/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	鳥居 猛 (Torii Takeshi) (30341407)	岡山大学・自然科学研究科・教授 (15301)	
連携研究者	面田 康裕 (Omoda Yasuhiro) (30332042)	明石工業高等専門学校・一般科目・准教授 (54501)	
連携研究者	奥山 真吾 (Okuyama Shingo) (50290812)	香川高等専門学校・情報工学科・准教授 (56203)	