様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 12 日現在

機関番号：１３５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４８１５
研究課題名（和文）代数曲線、K3曲面、アーベル多用体の総合的研究

研究課題名（英文）Study of algebraic curves, K3 surfaces and Abelian varieties

研究代表者
小池　健二（KOIKE, Kenji）

山梨大学・大学院総合研究部・准教授

研究者番号：２０３６２０５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,200,000円

研究成果の概要（和文）：三角群Δ(7,7,7)をモノドロミー群とするScwarz写像を考察し，その逆写像をRiemannのテータ関数を用いて具体的に構成した。Schwarz逆写像を構成する為に，付随する代数曲線の族に対し，モノドロミー群，周期行列，Riemann定数を具体的なsymplectic基底に対し決定した。これにより，Kleinの４次曲線及び７次Fermat曲線のモジュラー多様体としての解釈を与えた。

研究成果の概要（英文）：We studied the Schwarz map with the monodromy group Δ(7,7,7), and constructed its inverse by Riemann's theta constants explicitly. To construct the Schwarz inverse, we determined the monodromy group, Riemann's period matrices and the Riemann constant with an explicit symplectic basis for associated algebraic curves. As a consequence, we gave explicit modular interpretations of the Klein quartic curve and the Fermat septic curve as modular varieties parametrizing Abelian 6-folds with endomorphisms ZZ[z_7].

研究分野：代数幾何

キーワード：超幾何関数　代数曲線　K3曲面　アーベル多様体

１．研究開始当初の背景

Gauss の超幾何微分方程式 E(a,b,c):

z(z-1) u'' + {(a+b+1)z -c } u' + ab u = 0

は一般のパラメータ a,b,c に対し，複素平面から特異点 0,1,∞を除いた領域で定義され Euler 型の積分

$$\int_\gamma x^{a-c}(x-1)^{c-b-1}(x-z)^{-a}dx$$

を解に持つ 2 階の線形常微分方程式である。パラメータ a,b,c が有理数であれば，これは代数曲線の周期積分と見なせる。1 次独立な 2 解 u_0(z), u_1(z)の比 s(z) = u_0(z)/u_1(z) は多価解析関数を定め(Schwarz map)，s(z) に対するモノドロミー変換は 1 次分数変換で与えられる。パラメータ a,b,c が条件

|1-c| = 1/p,　|c-a-b| = 1/q, |a-b| = 1/r,
1/p + 1/q + 1/r <1（p,q,r は自然数か∞）

を満たすときモノドロミー群は三角群

$$\Delta(p,q,r) = \langle M_0,\ M_1,\ M_\infty \mid M_0^p = M_1^q = M_\infty^r = M_0M_1M_\infty = 1\rangle$$

に同型である。この場合，上（下）半平面は Schwarz map によって，頂点 s(0), s(1), s(∞) 角がπ/p, π/q, π/r の三角形に写像される。この二つの三角形がモノドロミーの作用により上半平面を埋め尽くし射影直線の uniformization を与える。
例えば E(1/2,1/2,1)は楕円曲線の Legendre 族　y^2 = x (x-1)(x-z)　に対する Picard-Fuchs 方程式でありモノドロミー群Δ(∞,∞,∞)は射影的に合同部分群 Γ(2) と同型である。同様に三角群Δ(n,n,n)も興味深く，その交換子部分群 N_n は n 次の Fermat 曲線 Fn の uniformization 与える。竹内の結果により，三角群Δ(n,n,n)が arithmetic となるのは n が 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15 のときだけである(この場合，対応する Fermat 曲線は志村曲線となる)。そして，これ等の群は代数曲線 X_t : y^m = x(x-1)(x-t) の Picard-Fuchs 方程式のモノドロミー群として生じる。

$\Delta(n,n,n)$	m	g	$[\mathbb{Q}(\zeta_m):\mathbb{Q}]$
(4,4,4)	8	7	4
(5,5,5)	5	4	4
(6,6,6)	12	10	4
(7,7,7)	7	6	6
(8,8,8)	16	15	8
(9,9,9)	9	7	6
(12,12,12)	24	22	8
(15,15,15)	15	13	8

これらの中で n=5, 7 の場合は Jacobi 多様体　J(X_t) が一般に単純であり Picard-Fuchs 方程式は H^1(X_t, ¥QQ)の variations of Hodge structure を与える。
これ等の例は志村により PEL families の具体例として考察され，de Jong と Noot によって Coleman の予想の反例を与える上で考察されている。 n=5 の場合には研究代表者によって 2 次元超球の uniformization の特殊化として詳しく調べられ Schwarz 逆写像 s^(-1) を Riemann のテータ零値で表現した結果があり，この結果は近年志賀，永野により高次の Hilbert 類体の構成に応用されている。三角群に対する保型関数には種々の研究があるが, co-compact な三角群に対する保型関数の具体的な構成は現状では少ない様に思われる。n=5 の場合の様な結果をより多く与えることにより，数論的応用が広がることが期待できる。申請者は過去に，Weng 氏との共同研究により，暗号理論に適した有限体上の Picard 曲線を構成している。今回考察する代数曲線に対しても，同様の結果が期待できる。

２．研究の目的

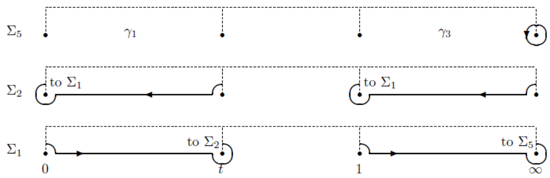
本研究では n=7 の場合にモノドロミー群，周期行列，Riemann 定数を計算する。これ等を利用して Schwarz 逆写像 s^(-1) を Riemann のテータ零値で表現することを目指す。これにより Klein の４次曲線 K_4 及び 7 次 Fermat 曲線の，円分体 ZZ[ζ_7]を虚数乗法に持つ 6 次元 Abel 多様体をパラメタライズするモジュラー多様体としての一つの解釈を与える。Klein の４次曲線は level 7 の楕円モジュラー曲線と同型であることが古典的に知られている。また Elkies は Klein の４次曲線を. 6 次元 QM 型 Abel 多様体をパラメタライズする志村曲線として考察した。Klein の４次曲線に対する我々の解釈はモジュラー多様体としての第三の表現を与えることになる。また、この Schwarz 写像は K3 曲面の周期写像と見なす事もできる。Garbagnati と Penegini は K3 曲面の non symplectic 自己同型を調べ，対応する K3 曲面を二つの代数曲線の積の商として組織的に構成した。その一つの族が今回考察する代数曲線の族となっている。対応する K3 曲面の Neron Severi 群や楕円曲面としての構造を調べることも目的の一つである。Schwarz 逆写像を具体的に構成することにより，上述の志賀-永野による高次類体の構成などへの応用も考察する。

３．研究の方法

t をパラメータとする種数 6 の代数曲線の族

X_t：y^7 = x(x-1)(x-t)

を 0,1,t,∞で分岐する複素平面の巡回 7 重被覆と見なし，ρを被覆自己同型とする。以下のように位相的 1-cycle γ_1 と γ_2 を定め



交点行列

Int_k =[ρ^i(γ_k), ρ^j(γ_k)]

を計算すると

$$\mathbf{Int}_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Int}_3=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&1&0\\-1&0&1&0&-1&1\\0&-1&0&1&0&-1\\1&0&-1&0&1&0\\-1&1&0&-1&0&1\\0&-1&1&0&-1&0\end{bmatrix}$$

となる。これによりシンプレクティック基底 A_i, B_i (i=1,2,3,4,5,6)を具体的に構成できる。被覆変換のシンプレクティック表現 M を

$$(\rho(A_1),\ldots,\rho(A_6),\rho(B_1),\ldots,\rho(B_6))$$
$$=(A_1,\ldots,A_6,B_1,\ldots,B_6)^tM.$$

により定め symplectic 群の部分群

$$Sp_{12}^M(\mathbb{Z})=\{g\in Sp_{12}(\mathbb{Z})\mid gM=Mg\}$$

及び 6 次 Siegel 上半空間の領域

$$\mathbb{H}_6^M=\{\tau\in\mathbb{H}_6\mid M\cdot\tau=\tau\}$$

を考えるとモジュラー埋め込み

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{D}_H^+ & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{H}_6^M\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathbb{D}_H^+/\Gamma & \longrightarrow & \mathbb{H}_6^M/Sp_{12}^M(\mathbb{Z})\end{array}$$

を得る。これにより Thomae 型定理を導く方法により，Riemann のテータ零値を用いて Schwarz 逆写像 s^(-1)を記述する。この種の公式は Bershadsky-Radul，Nakayashiki によって一般的な状況で構成されているが，我々の立場は Picard が 2 次元複素超球上のモジュラー形式を導いた古典的な仕事の様に，モジュライ論的な解析を目的としている。

４．研究成果

(1) Riemann 面 X_t の Abel-Jacobi 写像

$$Div(X_t)\longrightarrow J(X_t)$$
$$\sum m_iQ_i\mapsto\sum m_i\int_{P_\infty}^{Q_i}\vec{\xi}\quad\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^6\tau+\mathbb{Z}^6$$

を考察して以下の結果を得た。

①Riemann 面 X_t の Jacobi 多様体の(1-ρ)-torsaion subgroup

$$J(X_t)_{1-\rho}=\{z\in J(X_t)\mid(1-\rho)z=0\}$$

に対し等式

$$J(X_t)_{1-\rho}=\{\overline{\mathfrak{A}}(mP_0+nP_1)\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$\cong(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$$

を得た。より正確に

$$a_{m,n}=\frac{1}{7}(m,\,2m,\,3m,\,2m+3n,\,2m+3n,\,0)$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{7}(-m,\,-m,\,-m,\,3m+n,\,5m+4n,\,m+5n)$$

とおくと Abel-Jacobi 写像の像は

$$\mathfrak{A}(mP_0+nP_1)\equiv a_{m,n}\tau+b_{m,n}\quad\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^6\tau+\mathbb{Z}^6$$

により与えられる。

M-invariant な theta characteristic は

$$a_0=\frac{1}{2}(1,0,1,0,0,1),\ b_0=\frac{1}{2}(1,1,1,0,1,0)$$

を用いて(a_{m,n}+a_0, b_{m,n}+b_0)により与えられる。特に Riemann 定数 κ は half period a_0τ+b_0 であり

$$\overline{\kappa}-W_{\mathfrak{A}}^5=\Theta=-\Theta=\overline{\kappa}+W_{\mathfrak{A}}^5$$

が成り立つ。

② Schwarz 写像

$$\mathfrak{s}:\mathbb{C}-\{0,1\}\longrightarrow\mathbb{D}_H^+$$
$$t\mapsto u=[u_1(t):u_3(t)]$$

の逆写像は Riemann のテータ関数を用いて Γ(1-ζ)-invariant 関数

$$\mathrm{t}(u)\ =\ \zeta^5\frac{\vartheta_{[2,5]}(\Phi(u))^7}{\vartheta_{[3,5]}(\Phi(u))^7}$$

により与えられる。更にテータ関数を用いて具体的に構成される写像

$$Th\ :\ \mathbb{D}_H^+\longrightarrow\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

により算術商

$$\mathbb{D}_H^+/\Gamma((1-\zeta)^2)$$

と７次 Fermat 曲線の同型が与えられる。このことから Klein の４次曲線 K_4 が次の合同部分群による算術商と同型であることが導かれる。

$$\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\Gamma(1-\zeta)\mid a\equiv1\quad\mathrm{mod}\ (1-\zeta)^2\}$$

一般の合同部分群 $\mathbb{D}_H^+/\Gamma(\mathfrak{m})$ に対しては

モジュライ空間として次の様な解釈を得た。

$$\left\{\begin{matrix} Set\ of\ (A,E,\rho,\lambda)\ modulo\ isomorphisms\ f\ such\ that \\ \lambda^{-1}\equiv(\lambda'\circ f)^{-1}\quad on\quad (\mathfrak{m}^{-1}\mathbb{Z}[\zeta]/\mathbb{Z}[\zeta])^2 \end{matrix}\right\}$$

ただし，A は６次元 Abel 多様体，E は偏極，ρは位数７の自己同型で接空間への作用の固有値が

$$\zeta,\zeta,\zeta^2,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4.$$

となるもの，λは

$$E(x,y)=\frac{1}{7}Tr_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}((\zeta^3-\zeta^4)^t\overline{\lambda(x)}H^{-1}\lambda(y))$$

を満たす格子の同型である。

(2)二つの代数曲線

$$X_t\ :\ y_1^7=x_1(x_1-1)(x_1-t),$$
$$X_\infty\ :\ y_2^7=x_2^2-1$$

の積の自己同型

$$\rho\times\rho\ :\ X_t\times X_\infty\longrightarrow X_t\times X_\infty,$$
$$(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)\mapsto(x_1,\zeta y_1)\times(x_2,\zeta y_2),$$

による商は代数曲面

$$S_t\ :y^2=x(x-z)(x-tz)+z^{10}.$$

と双有理同値であり，非特異極小モデルは K3 曲面であり elliptic fibration

$$\pi\ :\ S_t\longrightarrow\mathbb{P}^1,\quad (x,y,z)\mapsto z.$$

を有する。この elliptic fibration の特異ファイバーは I_0^*型ファイバーが１個，IV 型ファイバーが１個，I_1 型ファイバーが 14 個である。I_0^*型ファイバーの既約成分を

$$2\ell_0+\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4$$

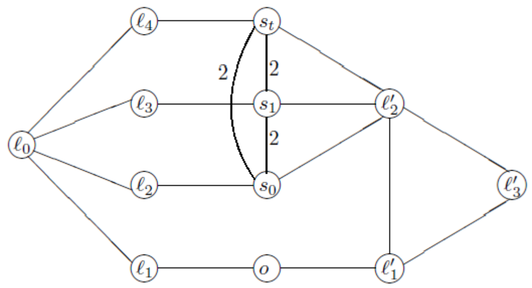
とし，IV 型ファイバーの既約成分を

$$\ell_1'+\ell_2'+\ell_3'$$

とする。また a= 0,1,t に対し

$$s_a\ :\ \mathbb{P}^1\longrightarrow S_t,\quad z\mapsto(x,y,z)=(az,z^5,z)$$

は section を与える。これ等の有理曲線の交点数は次のグラフで与えられる。



これ等の事実と Artebani, Sarti, Taki による K3 曲面の non-symplectic 自己同型の分類結果を用いて次の事が示せた。一般のパラメータ t に対し楕円 K3 曲面 S_t の transcendental lattice は U+ U(7)+E_8 であり，Mordell-Weil 群は Z^2 と同型である。自己同型

$$(x,y,z)\mapsto(\zeta x,\zeta^5y,\zeta z)$$

により transcendental lattice は Z[ζ]^2 と同型となり，この K3 曲面の１次元族に対する周期写像は Scwarz triangle mapping s(t) により与えられ，モノドロミー群はΔ(7,7,7)である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　１件）

Kenji Koike, The Fermat septic and the Klein quartic as moduli spaces of hypergeometric Jacobians, Hokkaido Mathematical Journal(査読有), Vol. 47 (2018), No. 1, 109-141.

６．研究組織
(1)研究代表者

小池　健二（KOIKE，Kenji）
山梨大学・大学院総合研究部・准教授
研究者番号：２０３６２０５６

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし