

令和元年6月13日現在

機関番号：34310

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04817

研究課題名(和文)非アルキメデス幾何と代数力学系とその周辺

研究課題名(英文)Nonarchimedean geometry, algebraic, arithmetic dynamics and related fields

研究代表者

川口 周 (Kawaguchi, Shu)

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：20324600

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：代数幾何の古典的な結果に、種数  $g$  の射影代数曲線  $X$  と直線束  $L$  に対して、 $L$  の次数が  $2g + 1$  上であれば、 $L$  の大域切断によって  $X$  を射影空間に埋め込めるというものがある。この古典的な結果の非アルキメデス幾何における類似(整構造を保つトロピカル化)を、山木吉彦氏と共同で進めた。また、アフィン平面上の写像として重要なヘノン写像の族に関する代数・数論力学系的な性質の研究を Liang-Chung Hsia 氏と共同で進めた。さらに、 $\mathbb{Q}$ -代数上の写像の次数の振る舞いについての研究を進めた。向井茂氏、吉川謙一氏と楢岡  $j$  関数とポーチヤーズ  $\Phi$  関数の関係についての研究を進めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数幾何学では、多項式の共通零点で定義される代数多様体の性質を調べる。多項式の係数を複素数とする複素代数多様体は深く研究されている。一方で、複素代数多様体の族を小さい範囲で考えるときには、係数をピユイズー級数体にとると良いことがある。ピユイズー級数体は非アルキメデス体とよばれるものであり、一般に非アルキメデス体上の代数多様体は、多面体を組み合わせたようなトロピカル代数多様体と結びつく。整構造を保つトロピカル化の研究は、このような非アルキメデス幾何の基礎的な研究である。代数・数論力学系におけるアフィン平面上の写像として重要なヘノン写像の族に関する性質も基礎的な研究である。

研究成果の概要(英文)：For a connected smooth projective curve  $X$  of genus  $g$ , global sections of any line bundle  $L$  with degree at least  $2g + 1$  give an embedding of the curve into projective space. With Kazuhiko Yamaki, we consider an analogous statement for a Berkovich skeleton in nonarchimedean geometry from the viewpoint of faithful tropicalizations. We also consider a higher dimensional case using adjoint line bundles. With Liang-Chung Hsia, we study arithmetic properties of a one-parameter family of Henon maps. We study inverse degrees of quadratic triangular maps on affine space defined over  $\mathbb{Q}$ -algebras. With Shigeru Mukai and Ken-Ichi Yoshikawa, we study relationship between the difference of elliptic  $j$ -functions and the Borcherds  $\Phi$  function.

研究分野：代数幾何学

キーワード：非アルキメデス幾何 代数・数論力学系

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

- (1) 非アルキメデス体上で定義された代数多様体  $X$  に対して、 $X$  に付随するベルコピッチの意味での解析多様体を考え、そのトロピカル化写像を考える。解析多様体の中の骨格 (スケルトン) の整数構造を保つトロピカル化写像は、忠実トロピカル化とよばれる。もともとは楕円曲線をトロピカル化したときの骨格の長さ、その楕円曲線の  $j$  不変量の非アルキメデス付値でのノルムが関係しているという 2006 年の Mikhalkin の観察がきっかけになっている。その後、Kats-Markwig-Markwig, Baker-Payne-Rabinoff, Gubler-Rabinoff-Werner をはじめとして、忠実トロピカル化は現在に至るまで非常に活発な研究がされている。
- (2) 離散力学系では、写像による反復合成による性質を調べる。固定された一つの写像を研究する方向と、パラメーター付けされた写像の族を研究する方向がある。後者の場合の (族に対する) 代数的・数論的な力学系の性質は、Baker-DeMarco, Ghioca-Hsia-Tucker をはじめとして非常に活発な研究がされている。これらの結果は、楕円曲線の族において 2 つの切断が同時にトーション点となるパラメーター値に関する Masser-Zannier による一連の研究の、離散力学系における研究とみなすこともできる。さらに、DeMarco-Wang-Ye により、力学系手法を用いた Masser-Zannier の定理の別証明も得られている。
- (3) 写像の反復合成による次数の増大度は (第 1) 力学系次数とよばれ重要な量で、複素力学系の観点 (Friedland-Milnor, Bedford-Kim, Boucksom-Favre-Jonsson など) からと、可積分系の観点 (Bellon-Viallet, Arnold など) から、非常に多くの研究がある。また、写像の次数のなす数列についても多くの研究がある。
- (4) 楕円  $j$  関数は楕円関数理論や保型形式で基本的な関数であり、楕円  $j$  関数の差についても、Gross-Zagier の singular moduli やリー代数の分母公式 (ポーチャーズ) など深い結果が知られている。一方で、ポーチャーズによって、エンリケス曲面のモジュライ上の関数としてポーチャーズの  $\Phi$  関数が構成されている。ポーチャーズの  $\Phi$  関数については、Jorgenson-Kramer, Sheithauer, 吉川, 川口-吉川-向井などによる研究がある。

### 2. 研究の目的

- (1) 代数曲線の古典的な結果に以下がある。種数が  $g$  の非特異射影曲線  $X$  と  $X$  上の直線束  $L$  に対して、 $L$  の次数が  $2g + 1$  以上であれば、 $L$  の大域切断によって  $X$  を射影空間に埋め込むことができる。また、高次元の代数多様体では随伴束の大域切断により代数多様体を射影空間に埋め込むことを考える。滑らかな射影多様体とその上の豊富な直線束に対して、その直線束に関する随伴束がいつ固定点自由になるかに関しては、Angehrn-Siu の結果があり一般には藤田予想がある。これらの結果の非アルキメデス的な類似の研究を、忠実トロピカル化の観点から行う。忠実トロピカル化と古典的な代数幾何の結果を合わせる視点が新しい。山木壱彦氏との共同研究である。
- (2) アフィン平面の自己同形写像にヘノン写像とよばれる重要なクラスがある。ヘノン写像の族を考え族の代数・数論的な性質を、unlikely intersection の観点から調べる。Liang-Chung Hsia 氏との共同研究である。
- (3) 力学系次数が計算されているのは、ほとんどの場合は複素数体上の写像である。正標数の体上の写像の次数の計算もわずかながらある。ここでは、冪零元を含むような  $\mathbb{Q}$ -代数上の写像について、アフィン  $N$  空間の 2 次三角多項式同型写像を考え、逆写像の次数を調べる。なお、 $\mathbb{Q}$ -代数上の写像の逆写像の次数は、Bass により、複素数体上のヤコビ予想と関連していることが知られている。
- (4) 楕円  $j$  関数とポーチャーズの  $\Phi$  関数について直接の関係は知られていない。ここでは、楕円  $j$  関数の差とポーチャーズの  $\Phi$  関数の関係を調べる。向井茂氏、吉川謙一氏との共同研究である。

### 3. 研究の方法

- (1) ベルコピッチの解析多様体の骨格 (スケルトン) 上の因子の理論、トロピカル曲線におけるリーマン・ロッホの定理とリーマンの不等式、代数幾何のコホモロジーの消滅定理、代数多様体とトロピカル多様体を結びつける Baker の特殊化の理論、Raynaud の定理などを用いる。
- (2) 固定された一つのヘノン写像に関する (筆者の以前の研究による) 局所体上の Green 関数の性質と大域体上の標準的高さ関数の性質、および、Thuillier, Yuan などによる等分布定理などを用いる。
- (3) Abyankar-Gurjar の逆関数公式、旗多様体のコホモロジーなどを用いる。
- (4) 楕円曲線の積によって作られるクンマー曲面の商として得られるエンリケス曲面の分類 (金銅, 向井, 大橋), ポーチャーズの  $\Phi$  関数の代数的表示 (川口-向井-吉川), ポーチャーズによる  $\Phi$  関数の積公式などを用いる。

### 4. 研究成果

- (1) 山木壱彦氏との共同研究である。曲線の場合をおおまかに述べると、種数が  $g$  (ただし、 $g$  は 2 以上) の非特異射影曲線  $X$  と  $X$  上の直線束  $L$  に対して、 $L$  の次数が  $3g - 1$  以上であれば、 $L$  の大域切断によって  $X$  に付随する解析多様体 (ベルコピッチ曲線) の任意

のスケルトンが整数構造を保ったまま，トロピカル射影空間に埋め込むことができるという結果を得た．曲線の種数が 0 のときは  $L$  の次数は 1 以上，曲線の種数が 1 のときは  $L$  の次数は 3 以上でよい．代数多様体が一般次元の場合は，豊富な直線束の adjoint 直線束の大域切断によって，良いスケルトンの整数構造を保つ埋め込める条件を与えた．

adjoint 直線束の大域切断がいつ固定点自由になるか，いつ非常に豊富になるかは，藤田予想とも関連していて多くの研究がされている．adjoint 直線束の大域切断による忠実トロピカル化についても藤田予想と関連することが分かった．なお，この良いスケルトンは Kontsevich と Soibelman による essential スケルトンを含むので，essential スケルトンについての忠実トロピカル化についての結果を与えている．さらに，Payne 氏との議論によって，曲線の場合の我々の結果から，トロピカル化の極限がベルコビッチ空間になるという Payne 氏の結果の次数をおさえる版が示せるという予想外の応用も得られた．

- (2) Liang-Chung Hsia 氏との共同研究である．アフィン曲線をパラメーター空間とするヘノン写像の族と初期点の反復合成によって定められる直線束が良いものであるかどうか (Zhang の意味での semipotitive adelicly metrized line bundle になるかどうか) について研究を進めた．直線束が良いものであることが分かれば，Thuillier, Yuan などによる等分布定理を用いることができ，unlikely intersection に関する性質も調べることができる．ヘノン写像に関しては，reversible なヘノン写像であるかそうでないかが大きな違いを生むことが分かってきた．これまでに得られた結果 (work in progress) を Oaxaca での BIRS Workshop on Arithmetic and Complex Dynamics で講演する機会を頂いた．
- (3)  $Q$ -代数上に定義された アフィン  $N$  空間の 2 次三角多項式同型写像に対して，その逆写像の次数の上限に関する結果を得た．上限は  $(7/4)2^{\{N-1\}}$  以上で  $3 \cdot 2^{\{N-1\}} - (N+1)$  以下であることが分かった．上限は  $(7/4)2^{\{N-1\}}$  以上であることについては，旗多様体のコホモロジー環の性質を用いた．上限が  $3 \cdot 2^{\{N-1\}} - (N+1)$  以下であることについては，Abyankar-Gurjar の逆関数公式を用いた．
- (4) 向井茂氏，吉川謙一氏との共同研究である．楕円  $j$  関数の差が，対応する楕円曲線の積によって作られるクンマー曲面の商として得られる 15 個のエンリケス曲面でのポーチャーズの  $\Phi$  関数の値と関連付けられることについて研究が進展した．

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

Shu Kawaguchi, On inverse degrees of quadratic triangular automorphisms over  $Q$ -algebras, *Comm. Algebra* **45**, 2017, 5297--5314 査読有  
DOI: 10.1080/00927872.2017.1310872

Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**, 2016, 5009--5035 査読有  
DOI: 10.1090/tran/6596

Shu Kawaguchi and Kazuhiko Yamaki, Algebraic rank on hyperelliptic graphs and graphs of genus 3, *Kyoto J. Math.*, 2016, 177--196 査読有  
DOI: 10.1215/21562261-3445192

Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties, *J. Reine Angew. Math.*, **713**, 2016, 21--48  
10.1515/crelle-2014-0020 査読有

Shu Kawaguchi and Kazuhiko Yamaki, Rank of divisors on hyperelliptic curves and graphs under specialization, *Int. Math. Res. Not.*, 2015, 4121 - 4176 査読有  
DOI: 10.1093/imrn/rnu059

[学会発表](計 6 件)

Shu Kawaguchi, Arithmetic properties of a certain family of Henon maps, BIRS Workshop on Arithmetic and Complex Dynamics, 2017年11月12日~2017年11月17日, The Casa Matemática Oaxaca (CMO), Mexico

川口周, 3次曲面のモジュライ上の保型形式とK3曲面上の同変解析的換率 (吉川謙一氏との joint work in progress), 第4回 K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 2016年10月10日~2016年10月12日, 北海道教育大学 札幌駅前サテライト (北海道札幌市)

Shu Kawaguchi, Effective faithful tropicalizations associated to linear systems, The conference Arakelov Geometry - Archimedean and Non-Archimedean Aspects 2016年08月22日~2016年08月26日, Universitat Regensburg, Regensburg city, Germany

Shu Kawaguchi, Effective faithful tropicalizations associated to linear systems, The 6th East Asia Number Theory Conference, 2016年08月22日~2016年08月26日, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin city, China

Shu Kawaguchi, Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves, Arithmetic and Algebraic Geometry 2016, 2016年01月26日, 東京大学大学院数理科学研究科

6 Shu Kawaguchi, Around canonical heights in arithmetic dynamics, Arithmetic 2015: Silvermania, 2015年08月04日, Brown University, USA

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。