

平成 30 年 5 月 7 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04824

研究課題名(和文)代数的層のモジュライ空間の双有理幾何

研究課題名(英文)Birational geometry of moduli spaces of algebraic sheaves

研究代表者

阿部 健 (ABE, Takeshi)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・准教授

研究者番号：90362409

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクトリーマン面のピカール群上にはテータ因子が存在する。この「非可換類似」として、コンパクトリーマン面上のベクトル束のモジュライ上には一般化されたテータ因子が存在し、それに付随する直線束の大域切断は一般化されたテータ函数と呼ばれる。一般化されたテータ函数の空間に関して Strange duality と呼ばれる興味深い現象がある。これの高次元版として、射影的曲面上の層のモジュライに対しても Strange duality が成立すると予想されている。本研究者は射影平面の場合に部分的結果を得おり、本研究ではこの先行研究を引き継ぎ、2次曲面上の Strange duality に関して部分的結果を得た。

研究成果の概要(英文)：There is a theta divisor on the Picard group, the set of linear equivalence classes of divisors, of a compact Riemann surface. As a "non-abelian analogue", we have a generalized theta divisor on the moduli space of algebraic vector bundles on a compact Riemann surface. A global section of the line bundle associated with a generalized theta divisor is called a generalized theta function. We have an interesting phenomena called Strange duality about generalized theta functions. It is conjectured that we also have Strange duality phenomena for moduli spaces of sheaves on projective surfaces. I once proved partially the strange duality conjecture for projective plane. In this research, continuing the preceding research, I proved some cases of the strange duality conjecture for a quadric surface.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数的層 モジュライ空間

## 1. 研究開始当初の背景

コンパクトリーマン面の研究において、因子やその線形系を調べることは基本的手段である。因子の線形同値類はピカル群と呼ばれ、アーベル多様体になっている。ピカル群上にはテータ因子と呼ばれる自然に定まる因子が存在しており、この因子に付随する直線束の大域切断は古典的なテータ函数に対応している。この大域切断の空間の次元は、ピカル群がアーベル多様体であるので容易に計算できる。

これらの「非可換類似」を考えることができる。非特異射影曲線上の代数的なベクトル束のモジュライ空間上には一般テータ因子と呼ばれる因子が存在している。一般テータ因子に付随する直線束の大域切断は実際の関数に対応するわけではないが、一般テータ函数と呼ばれる。一般テータ函数の次元を求めることは興味深い。ベクトル束のモジュライ空間はアーベル多様体ではないため、具体的に次元を計算するのは代数幾何学的手法では困難であった。そんな中、一般テータ函数の空間は共形場ブロックの空間に同型であるという、数理物理からの結果は代数幾何学者には驚きであった。この同型を通して一般テータ函数の空間の次元が求まった (Verlinde の公式)。

Verlinde の公式を用いて一般テータ函数の空間を計算するとある種の双対性があることに気づく。非特異射影曲線  $C$  上で階数  $r$  のベクトル束のモジュライ空間  $M$  と階数  $n$  のベクトル束のモジュライ空間  $M'$  を考える。  $M$  上のレベル  $n$  の一般テータ函数の空間と、  $M'$  上のレベル  $r$  の一般テータ函数の空間は同じ次元を持つのである。 Beauville はこれらのベクトル空間の間に幾何学的に自然に定まる線形写像を定義し、それが同型であろう、と予想した。これが Strange duality 予想である。この予想は Belkale[1], Marian-Oprea[2]によって解決された。

この曲線上のベクトル束のモジュライに対する Strange duality 予想に触発されて、LePotier は代数曲面上の層のモジュライ空間に対して Strange duality を考察した。すなわち、代数曲面  $S$  上の然るべき代数的層のモジュライ空間を二つ  $M, M'$  考え、それぞれの上の然るべき直線束  $L, L'$  を考えるとき、  $L$  の大域切断の空間と  $L'$  の大域切断の空間とが双対である、と予想した。代数曲面が射影平面のとき、Danila[3]はいくつかの場合に対し、Strange duality を証明した。その後、本研究者[4]や、Yuan[5], Gottsche[6]はさらにいくつかの場合に Strange duality の成立を証明した。しかし代数曲面上の層のモジュライに対する Strange duality は未だ多くの場合未解決である。

- [1] P. Belkale: The strange duality conjecture for generic curves. J. Amer Math Soc, 21 (2008), no. 1, 235-258.
- [2] A. Marian, D. Oprea: The level-rank duality for non-abelian theta functions. Invent. Math. 168 (2007), no. 2, 225-247.
- [3] G. DANILA: Sections du fibré d'eterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stable de rang 2 sur le plan projectif, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (2000), 1323 - 1374.
- [4] T. Abe, : Deformation of rank 2 quasi-bundles and some strange dualities for rational surfaces. Duke Math. J. 155 (2010), no. 3, 577-620.
- [5] Y. Yuan : Moduli spaces of 1-dimensional semi-stable sheaves and strange duality on  $P^2$ , Adv. Math. 318 (2017), 130-157.
- [6] L. Gottsche and Y. Yuan : Generating functions for K-theoretic Donaldson invariants and Le Potier's strange duality, arXiv:1512.06648.

## 2. 研究の目的

代数曲面上の層のモジュライ空間に対する Strange duality 予想では、モジュライ空間  $M$  上の直線束  $L$  の大域切断の空間を考察するのであるが、一般的に言って、この空間を調べるのは (例えばその次元を計算するのですら) 難しい。これに対する一つの戦略は、より調べやすい射影多様体  $M'$  とその上の直線束  $L'$  で  $M$  と  $M'$  が余次元 1 で同型となるものを見つけることである。層のモジュライの場合、安定性を計る偏極を動かすことによって、双有理同値なモジュライ空間を作ることができるが、本研究者が興味を持っている射影平面の場合は、ピカル数が 1 であるため偏極を動かすことができない。

この Strange duality の話とは全く独立した話で、Arcara-Bertram-Coskun-Huizenga[1] は、射影平面上の点のヒルベルト概形と双有理同型な多様体として Bridgeland 不安定な層の複体のモジュライ空間を考え、ヒルベルト概形の双有理幾何を調べた。同じ思想の下、Coskun-Huizenga-Woolf[2] は射影平面の場合に層のモジュライ空間の有効錐を完全に決定してしまった。これは、層のモジュライ空間を調べる際、それと双有理同型な層の複体のモジュライ空間を考えることが有効であることを示唆している。

Coskun-Huizenga-Woolf の手法を応用して、本研究者[3]は、射影平面上の層のモジュライ空間に対する Strange duality で、二つのモジュライ空間のうち少なくとも一方が高次元なら、Strange duality が成立することを示した。

これらを踏まえ、本研究の目的は、射影平面以外の場合にも、層の複体のモジュライ空間を考えることにより、層のモジュライ空間の幾何学的性質（有効錐や豊富錐など）を調べることができるかを明らかにすることである。また、その手法をもちいて、Strange duality へ応用できるかどうかを明らかにすることである。

[1]D. Arcara, A. Bertram, I. Coskun, J. Huizenga : The minimal model program for the Hilbert

scheme of points on  $P^2$  and Bridgeland stability, Adv. Math. 235 (2013), 580-626.

[2]I. Coskun, J. Huizenga and M. Woolf : The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017), no. 5, 1421-1467.

[3] T. Abe : Strange duality for height zero moduli spaces of sheaves on  $P^2$ , The Michigan Mathematical Journal, Vol. 64 (2015) 569-586

### 3. 研究の方法

Coskun-Huizenga-Woolf による射影平面上の層のモジュライ空間の研究で鍵となっていた事柄は、Drezet によって導入された、射影平面上の層のモジュライ空間の「高さ」という量や一般化された Beilinson スペクトル系列、およびそれと Kronecker quiver の関係であった。よって、射影平面以外の有理曲面に対して、Coskun-Huizenga-Woolf のアプローチを用いて層のモジュライを調べる本研究においては、具体的な研究方法は、上述の Drezet の結果を他の有理曲面に拡張するということになる。

また、またこの一般化された事実を用いて、層のモジュライ空間の有効錐の決定や、さらにそれを用いた Strange duality への取り組みが考えられる。

### 4. 研究成果

(1) 2次曲面上の半安定層のチャーン類について：代数曲面  $S$  上で半安定層を考えるとき、そのチャーン類はどの範囲を動かか、という問題は、言い換えると、与えられたチャーン類を持つ半安定層のモジュライ空間は空か否かを決定する問題と同じであるから、層のモジュライの研究において基本的問題である。射影平面の場合は Drezet と LePotier [1] は、半安定層のチャーン類を完全に決定した。彼らの記述では射影平面上の例外束が鍵になっている。彼らはまず、射影平面上の例外束が、直線束から mutation という操作ですべて得られることを示し、例外束のチャーン類を決定した。そして半安定層のチャーン類は、例外束を用いて記述されるある範囲にあることを示した。

Drezet [2], [3] は [1] の結果を精密にした。この精密化の著しい点は、射影平面上の層のモジュライに対して「高さ」という量を定義す

ることを可能にしたことである。

Drezet や LePotier の研究の2次曲面版として、Rudakov [4] は2次曲面上の半安定層のチャーン類を決定している。彼の記述もやはり2次曲面上の例外束を用いている。これは Drezet-LePotier [1] の研究の2次曲面版である。射影平面の場合には Drezet による精密化があった。この精密化の2次曲面版は未だ成し遂げられていない。本研究の研究成果は、この精密化に相当するものを、第一チャーン類が対称な場合に得ることができた、というものである。その結果として、対称な第一チャーン類を持つ半安定層のモジュライ空間に対して「高さ」という量を定義することができた。対称な第一チャーン類を持つ半安定層のチャーン類を記述するには、対称な例外束を考えるだけで充分である、というのが本質的な考察である。これはとても素朴な観察であるが、今まで見過ごされていたようである。

(2) 高さ零の2次曲面上の半安定層のモジュライ空間と quiver の表現空間について：Drezet は [3] で高さが零の層のモジュライ空間はクロネッカー quiver の表現空間と同型であることを示した。本研究の研究成果は、これの2次曲面版を得た、ということである。対称な第一チャーン類を持つ半安定層のモジュライ空間が高さ零のとき、それはある種の quiver の表現空間と同型になることを示した。



ただし、ここに現れる quiver はクロネッカー quiver とは限らず、上のような頂点が3つあるものも現れる。

層と quiver の表現とは、一般化された Beilinson のスペクトル系列により関係付けられるが、モジュライ空間の同型を証明する際一番核になるのは、この対応の下で、層の安定性と quiver の表現の安定性が丁度対応する、ということを示す部分である。Drezet は LePotier の補題というものをを用いて巧みにこれを示しているが、議論ががやや技術的過ぎるようにも思える。本研究では、Bridgeland 安定性を考えることにより、この部分の証明を概念的なものに置き換得ることが出来た。

(3) 2次曲面上の半安定層のモジュライ空間の有効錐について：Coskun-Huizenga-Woolf は射影平面上の層のモジュライ空間の有効錐を決定した。彼らは錐の端を見つけるために、層のモジュライ空間からクロネッカー quiver の表現空間へ写像を構成した。本研究では、これの2次曲面類似として、まず、2次曲面上の対称な第一チャーン類を持つ層のモジュライ空間から、(2) で現れた quiver の表現空間へ有理写

像を構成した。その結果として、2次曲面上の対称な第一チャーン類を持つ層のモジュライ空間の有効錐の「対称な部分」の記述を得ることができた。

(4) 高さ零の2次曲面上の不安定層のモジュライ空間の Strange duality につて：射影空間上の層のモジュライ空間に対する Strange duality に関する本研究の結果として、Strange duality に現れるモジュライ空間のうち一方が高さ零ならば Strange duality が成り立つ、というものがある。本研究では、これの2次曲面類似として、2次曲面上の対称な第一チャーン類を持つ層のモジュライ空間に対する Strange duality も、現れるモジュライ空間の一方の高さが零ならば、成立することを示した。ここで、モジュライ空間の「高さ」とは、(1) で定義したものである。

[1] J. -M. Drezet and J. Le Potier : Fibres stables et fibres exceptionnels sur  $P^2$ , Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) 18 (1985), no. 2, 193-243.

[2] J. -M. Drezet : Fibres exceptionnels et suite spectrale de Beilinson generalisee sur  $P^2$ , Math. Ann. 275 (1986), no. 1, 25-48.

[3] J. -M. Drezet : Fibres exceptionnels et varietes de modules de faisceaux semi-stables sur  $P^2$ , J. Reine Angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[4] A. N. Rudakov, A description of Chern classes of semistable sheaves on a quadric surface, J. Reine Angew. Math. 453 (1994), 113-135.

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計1件)

著者：阿部 健

論文表題：Semistable sheaves with symmetric  $c_1$  on a quadric surface

雑誌名：The Nagoya Mathematical Journal

査読：有

巻：227巻

発行年：2017

ページ：86 - 159

[学会発表](計3件)

発表者：阿部 健

発表表題：Semistable sheaves with symmetric  $c_1$  on a quadric surface

学会等名：Algebraic Geometry Seminar in Kumamoto

発表年月日：2017年8月31日

発表場所：熊本大学(熊本県・熊本市)

発表者：阿部 健

発表表題：Strange Duality for Height Zero Moduli Spaces of Sheaves on  $P^2$

学会等名：高次元代数幾何とその周辺

発表年月日：2016年2月5日

発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

発表者：阿部 健

発表表題：Strange Duality for Height Zero Moduli Spaces of Sheaves on  $P^2$

学会等名：Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces

発表年月日：2015年10月26日

発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 健 (ABE Takeshi)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・准教授

研究者番号：90362409