様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：３２７１４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４８３０

研究課題名（和文）二重被覆代数曲線と対称数値半群から考察するフルヴィッツの問題とＫ３曲面の研究

研究課題名（英文）Research on Hurwitz's problem and K3 surfaces through double covers of curves and symmetric numerical semigroups

研究代表者
米田　二良（Komeda, Jiryo）

神奈川工科大学・公私立大学の部局等・教授

研究者番号：９０１６２０６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：連携研究者とWeierstrass 半群が２重被覆の分岐点から得られる条件、海外共同研究者とは、６次及び５次平面代数曲線の総変曲点上の二重被覆で分岐している点のWeierstrass 半群の論文が受理され、出版された。研究協力者とは、Galois Weierstrass 点に関する、またリーマン定数と数値半群に関する論文が受理され出版された。また、すでに受理されていた論文が２編出版された。
他に大学の紀要に３編、RIMS講究録に３編が印刷された。なお、学会等での口頭発表は11件である。代数曲線論シンポジウムを連携研究者と協力して３回主催した。

研究成果の概要（英文）：A research collaboration person and I wrote the article on the conditions for Weierstrass semigroups gained from those of ramification points of double coverings, which was published. An overseas collaborator and I wrote the articles on the Weierstrass semigroups of the ramification points of double covering of plane curves of degree 6 (resp. 5) over total flexes (resp. total flexes and non-ordinary flexes), which were also published. The articles on Galois Weierstrass points (resp. Riemann constants) were published. Those papers are joint works with research collaboration people. Moreover, the other two accepted articles were published.
The three papers were published in the research reports of my university and the other three articles were published in RIMS Kokyuroku. Moreover, the number of oral presentations in workshops is 11. A research collaboration person and I organized the symposium on algebraic curves every year.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ワイエルシュトラス半群　ガロア・ワイエルシュトラス点　2重被覆　代数曲線の3重被覆　平面代数曲線　K3曲面　トーリック曲面　射影直線の巡回被覆

１．研究開始当初の背景

（１）フルビッツの問題とは、数値半群が代数曲線の点のワイエルシュトラス半群で実現される計算可能な必要十分条件を求めよである。その必要条件は初めて Buchweitz によって求められた。そして Buchweitz は代数曲線で得られない数値半群を初めて与えた。

（２）Torres は、二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を研究することで、Buchweitz の条件が十分条件でないことを示した。ここでは、対称数値半群と二重被覆の関係をうまく使っている。

（３）本研究者は、５以上の種数の代数曲線の二重被覆の分岐点を研究することで Torres の方法では見つからなかった代数曲線のワイエルシュトラス半群で実現されない数値半群を構成した。

（４）平面代数曲線が次数４のときで二重被覆の種数が７以上のとき、分岐点のワイエルシュトラス半群については決定されている。二重被覆の種数が９以上の時は本研究者の結果であり、種数が 8,7 のときは研究研究者と本研究者の共同研究で得られたものである。

（５）平面代数曲線上のガロア点のワイエルシュトラス半群は知られている。また、ガロア点の概念を拡張をしたガロア・ワイエルシュトラス点のワイエルシュトラス半群についても射影直線の素数次拡大になっている場合は知られている。

（６）研究協力者が、トーリック曲面上の代数曲線の点のワイエルシュトラス半群について研究をし、その計算の仕方について結果を得ている。

（７）対称数値半群をワイエルシュトラス半群に持つ代数曲線のシグマ関数やその代数曲線のヤコビ多様体のリーマン定数については知られている。

（８）井出によって、種数が８以下の全ての代数曲線はある K３曲面上に載っていることが知られている。しかし種数９以上の代数曲線が全て、ある K３曲面上に載っているわけではない。実際、どのような具体的な代数曲線がある K３曲面に載っているかについては、あまり知られていない。

２．研究の目的

（１）今までの方法では見つけられなかった代数曲線の点のワイエルシュトラス半群で実現されない数値半群をみつけること。

（２）次数が５以上の平面代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を決定すること。

（３）トーリック曲面上の代数曲線のガロア・ワイエルシュトラス点について調べること。

（４）特別な K３曲面、例えば射影平面や重み付き射影平面の二重被覆になっている場合にそれに載っている代数曲線を下の曲面の代数曲線の二重被覆として捉えたときの分岐点のワイエルシュトラス半群を計算すること。

（５）対称的でない数値半群をワイエルシュトラス半群にもつ代数曲線のシグマ関数やその代数曲線のヤコビ多様体のリーマン定数について考えること。

（６）フルビッツの問題を対称数値半群の問題に帰着すること。

（７）準ガロア・ワイエルシュトラス点について調べること。

（８）トーレスの二重被覆と数値半群に関する結果を良くすること。

（９）３重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を調べること。

（１０）導手が上限に近い数値半群について、その性質を調べたり、それが代数曲線のワイエルシュトラス半群になっている場合のその上での二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を調べること。

３．研究の方法

連携研究者と共催で、毎年１２月に「代数曲線論シンポジウム」を開催し、代数曲線論の発展に寄与すると共に、講演者や参加者と本研究に関する話題について議論する。
連携研究者、海外共同研究者とは互いの大学を訪問し、共同研究を実施する。研究協力者で東京近辺に在住していない場合は、こちらから訪問して共同研究を実施する。東京近辺に在住の場合は本学に来てもらい共同研究を実施する。これらに関する旅費については基本的に科研費から支出する。これから研究の目的(1)から(10)に対応して研究の方法を書く。

（１）二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群を調べ、代数曲線で得られない導手が大きい数値半群をみつける。

（２）次数が５または６の平面代数曲線で、接線と曲線の接触度が次数または次数−１の点の上での二重被覆の分岐点を決定する。

（３）射影直線の素数次巡回被覆がトーリック曲面に載っている場合の分岐点のワイエルシュトラス半群の特徴衣付けをする。

（４）特別な K３曲面として重みが 1,1,4 である射影平面 P(1,1,4)の二重被覆のなっている場合を考える。このとき、この重み付き射影平面上で、ある方程式で決まる代数曲線の二重被覆の分岐点を考える。

（５）射影直線の素数次巡回被覆である代数曲線のシグマ関数の構築、そのヤコビ多様体のリーマン定数について調べる。

（６）どのような対称数値半群がワイエルシュトラス半群になっていることがわかればフルビッツの問題が解決できるかどうかを示す。

（７）準ガロア・ワイエルシュトラス点の半群が２個で生成されているときにその点の個数を明らかにする。

（８）トーレスの手法を精密に見て、トーレスの結果の不等式がどこまで良くなるかを

はっきりさせる。
（９）巡回３重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群について二重被覆と類似の方法を使って決定する。
（１０）数値半群の導手が上限、上限マイナス１を取る場合は、構造が簡単であるが上限マイナス２になると趣きが変わってくる。この場合に二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群について考察する。

４．研究成果
番号(1)から(10)は、研究目的、研究方法の番号に対応している。ここでは、目的、方法に対応させて成果を述べることにする。
（１）数値半群の導手が上限マイナス２の場合に、ある意味では、一般的には代数曲線からは得られないこと示して、口頭発表している（学会発表[1],[2]）。これは新しいタイプの例を与えている。今後、導手が上限マイナス３の場合も含めて考えていきたい。
（２）次数５の平面代数曲線の接線と曲線の接触度が次数または次数−１の点の上での二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群は決定した（雑誌論文[14]）。次数が６の場合は接触度が６の場合に結果が得られた。接触度５の場合も結果を得て、現在、論文を執筆中である。これらは海外共同研究者との共同研究である。
（３）射影直線の素数次巡回被覆がトーリック曲面に載っている場合にその分岐点のワイエルシュトラス半群を決定した。現在、論文を執筆中である。これは研究協力者との共同研究である。
（４）重み付き射影平面 P(1,1,4)に載っているフェルマ型の代数曲線と、ある一つのタイプのフェルマ型でない代数曲線の二重被覆を考える。これは P(1,1,4)の二重被覆であるK３曲面に載っている。この分岐点のワイエルシュトラス半群を決定し、その論文を現在投稿中である。これは研究協力者との共同研究である。
（５）射影直線の３次巡回被覆で分岐点のワイエルシュトラス半群が準対称数値半群の場合にシグマ関数の構成、そしてそのヤコビ多様体のリーマン定数を明らかにした論文が出版または受理された（雑誌論文[1],[8]）。この場合、対称数値半群のときに知られている結果をシフトする必要がある。これは研究協力者との共同研究である。今後、準対称数値半群でない場合にも考えていければと思っている。
（６）どのような対称数値半群が代数曲線のワイエルシュトラス半群になっていればフルビッツの問題が解決するかについては結果を得たが、そのタイプの対称数値半群が代数曲線のワイエルシュトラス半群から得られるための必要十分条件はまだ得られていない状況である。もう少し進展があってから論文としてまとめる予定でいる。
（７）ガロア点とワイエルシュトラス半群が２個で生成される準ガロア・ワイエルシュトラス点の関係を二重被覆を通して明らかにした。そして、この結果が出版された（雑誌論文[6]）。また、半群が２元生成である準ガロア・ワイエルシュトラス点の個数についても結果を得て、それに関する論文を現在投稿中である。これらは研究協力者との共同研究である。準ガロア・ワイエルシュトラス点についての性質は、今まで明らかにされていなくて、新しい分野の結果だと思われる。今後、３元生成の場合にも同様の問題を考えていきたい。
（８）ワイエルシュトラス点のワイエルシュトラス半群の種数が、２で割ったときの数値半群の種数 g との比較で 6g+4 以上であるなら必ず二重被覆の分岐点になっているというのがトーレスの結果であるが、連携研究者との共同研究で 6g まで下げることができ、その論文が出版された（雑誌論文[5]）。おそらく、この結果が最良の下限のようで、今後、この点をはっきりさせたい。
（９）巡回３重被覆の分岐点については、そのワイエルシュトラス半群に属している３と素な最小の整数を固定して、種数が一番大きい場合と二番目に大きい場合についてはワイエルシュトラス半群についての結果を得ていて、研究集会で発表している（雑誌論文[4],学会発表[3],[4],[6]）。これらは連携研究者との共同研究である。今後、それらの結果を論文としてまとめていく予定でいる。３重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群についての具体的な結果はほとんどないので意義のある内容だと考えている。さらに巡回でない３重被覆についても調べていく積もりでいる。
（１０）数値半群の導手が上限マイナス２の場合には、さらに almost symmetric なら、その双対的な性質を利用する。そうすると二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群がこのタイプの場合、結果を得ることができ、研究集会で講演をしている（学会発表[7],[8]）。また、本学の紀要にこのような数値半群についての性質をまとめたものが掲載されている（雑誌論文[2]）。このタイプの数値半群についての論文は全くないし、また色んな現象が起こっているので、より深く研究することは大変興味深い。また、この場合の結果が、一般の場合、すなわち、導手が上限マイナス３以下のときにも類似の性質が成立するように思われる。今後、これらの場合にも研究を進めたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１４件）
[1] J.Komeda, S.Matsutani, E.Previato, The sigma function of trigonal cyclic curves, Letters in Mathematical Phisics,

査読有、印刷中
[2] J.Komeda, Pseudo-Frobenius numbers of numerical semigroups with high conductor, 神奈川工科大学研究報告　B 理工学編、査読有、42, 2018, 41-46
[3] S.J.Kim, J.Komeda, Weierstrass semigroups on double covers of plane curves of degree six with total flexes, Bull. Korean Math. Soc., 査読有、55, 2018, 611-624
DOI:10.4134/BKMS.b170195
[4] J.Komeda, Numerical semigroups and triple cyclic covers of curves, RIMS Kokyuroku, 査読無、2051, 2017, 116-119
[5]J.Komeda,A.Ohbuchi,On γ-hyperelliptic Weierstrass semigroups of genus $6\gamma+1$ and 6γ, Bull. Braz. Math. Soc., New Series, 査読有、48, 2017, 209-218
DOI: 10.1007/s00574-016-0002-z
[6] J.Komeda, T.Takahashi, Relating Galois points to weak Galois Weierstrass points through double coverings of curves, J. Korean Math. Soc.,査読有、54, 2017, 69-86
DOI: 10.4134/JKMS.j150593
[7]J.Komeda, Weierstrass semigroups of ramification points on double covers over ordinary points, 神奈川工科大学研究報告 B 理工学編、査読有、41, 2017, 1-4
[8] J.Komeda, S.Matsutani, E.Previato, The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup, Archiv der Mathematik, 査読有、107, 2016, 499-509
DOI:10.1007/s00013-016-0962-7
[9]J.Komeda, Numerical semigroups attained by double covers of plane curves of degree six, RIMS Kokyuroku, 査読無、2008, 2016, 100-106
[10] J.Komeda, The proportion of numerical semigroups with high conductor, 神奈川工科大学研究報告　B 理工学編、査読有、40, 2016, 7-9
[11] T.Harui, J.Komeda, Numerical semigroups of genus six and double coverings of curves of genus three, Semigroup Forum, 査読有、 91, 2015, 601-610
DOI:10.1007/s00233-014.9671-3
[12] J.Komeda, Quasi-symmetric numerical semigroups and double covers of curves, RIMS Kokyuroku,査読有、194, 2015, 55-60
[13] J.Komeda, K.Watanabe, On extensions of a double covering of plane curves and Weierstrass semigroups of the double covering type, Semigroup Forum, 査読有、91, 2015, 517-523
DOI:10.1007/s00233-015-9718-0
[14] S.J.Kim, J.Komeda, Weierstrass semigroups on double covers of plane curves of degree 5, Kodai Mathmatical Journal, 査読有、38, 2015, 270-288

〔学会発表〕(計１１件)
[1] J.Komeda, Diagrams of numerical semigroups whose general members are non-Weierstrass, 「代数系、論理、言語とその周辺領域」共同研究（公開型）、2018 年 2 月 19 日、京都大学数理解析研究所（京都市）
[2] J.Komeda, Numerical semigroups with high conductor and Galois covers of curves,KIAS Seminars, 2017 年 9 月 1 日、KIAS（韓国・ソウル市）
[3] 米田二良、Weierstrass semigroups on Galois covers of degree two or three,10th Workshop on Galois point and related topics, 2017 年 7 月 17 日、KKR 蔵王白銀荘（山形市）
[4] 米田二良、Numerical semigroups gained by dividing numerical semigroups by three, 2017 年 5 月 12 日、形式言語とオートマトン研究集会、長岡京市中央生涯学習センター（京都府長岡京市）
[5] J.Komeda, Numerical semigroups with high conductor, Mini Workshop 2017 on Algebraic System and Theoretical Computer Science, 2017 年 2 月 23 日、京都産業大学(京都市)
[6] J.Komeda, Numerical semigroups and cyclic triple covers of curves, 「言語、論理、代数系と計算機科学の展開」研究集会、2017 年 2 月 22 日、京都大学数理解析研究所（京都市）
[7] 米田二良、Almost symmetric numerical semigroups and double covers of curves, 研究集会「代数曲線・曲面とその周辺」2016 年 11 月 26 日、大阪大学理学部（大阪府豊中市）
[8] 米田二良、Almost symmetric numerical semigroups of multiplicity 4 or 6 from a view point of algebraic curves, 形式言語とオートマトン研究集会、2016 年 5 月 13 日、長岡京市中央生涯学習センター（京都府長岡京市）
[9] 米田二良、Numerical semigroups attained by double covers of plane curves of degree six, 研究集会「代数系、論理、言語と計算機科学」、2016 年 2 月 16 日、京都大学数理解析研究所（京都市）
[10] 米田二良、非特異平面４次曲線の二重被覆上の Weierstrass 半群、中央大学代数セミナー、2016 年 1 月 22 日中央大学理工学部数学科（東京都文京区）
[11]米田二良、The existence of curves with certain Weierstrass semigroups on double covers of P(1,1,4),Workshop on Galois point and related topic, 2015 年 9 月 5 日、神奈川大学横浜キャンパス（横浜市）

６．研究組織
(1)研究代表者
　米田　二良　(Komeda, Jiryo)

神奈川工科大学·基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065

(2)連携研究者

大渕　朗（OHBUCHI, Akira）
徳島大学大学院ソシオアーツアンドサイエンス研究部
研究者番号：　10211111

(3)研究協力者

松谷　茂樹（MATSUTANI, Shigeki）
高橋　剛（TAKAHASI, Takeshi）
春井　岳（HARUI, Takeshi）
川口　良（KAWAGUCHI, Ryo）
渡邉　健太（WATANABE, Kenta）
真瀬　真樹子（MASE, Makiko）