2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２６１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８３８
研究課題名（和文）平面WEB幾何学の研究

研究課題名（英文）Geometry of Planar 3-webs

研究代表者
中居　功（Nakai, Isao）

お茶の水女子大学・基幹研究院・教授

研究者番号：９０２０７７０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：平面の特異3-WEB構造の曲率形式の簡明な計算法を確立した。平面のWEB 構造とは葉層、すなわち平面の曲線の一次元族による埋め尽くしの構造が３つ以上重なり合ってできる幾何構造である。この構造は波の重なり等、自然界の至るところに見ることができる。この構造の標準的モデルは、３つの平行線族からなるものであり、その構造はヘキサゴナルWEBとよばれるが、一般にほとんどのWEBはそれから位相的なズレが存在する。そのズレを定量化するものが、WEB曲率形式である。この曲率形式は、1930年頃にブラシュケにより非特異なWEB構造に対して与えられた。本研究では特異WEB構造にたいし曲率形式の公式を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Web 構造は波の重ね合わせの構造である。このような構造は自然界だけでなく、数理的考察の場面でいたるところに現れる。本研究課題の3-web の曲率形式は,WEB幾何学の研究の基礎をなしている。特異3-web に対するその計算方法の確立は、今後の一般のWEB 構造の研究への応用が期待でき、自然科学への将来の応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：A simple elementary method of computation of the curvature form of singular planar 3-webs has been established. A planar web is a configuration of excessively many, more than or equal to 3, foliations of the plane, one parameter families of curves filling up the plane. This structure is seen ubiquitously in nature, for instance in configurations of waves. The canonical model for this structure is represented by 3 families of parallel lines, which is called a hexagonal 3-web. In general almost all webs differ topologically from this canonical model. The difference is measured by quantified by the so-called web curvature form. The curvature form was given by Blaschke et al. in 1930's for nonsingular webs. By this research project, the curvature was computed for arbitrarily singular webs.

研究分野：幾何学、微分位相幾何学、複素力学

キーワード：WEB 幾何学　曲率形式　位相剛性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）平面 3-WEB とは平面の葉層 F1,F2,F3 の３つ組 W＝(F1,F2,F3)のなす平面幾何構造である。この構造の曲率形式は 1930 年頃までに Thomsen、Blaschke 等により定義された。WEB 幾何学の研究が発展した現在でも最も重要な不変量であり、当初の定義がそのままの形で WEB 幾何学の理論の基礎に位置している。

（２）平面 3-WEB 構造の曲率形式の定義は WEB の定義式のいわゆる“正規化”を用いているため、今世紀に入るまで、特異 WEB 構造にたいしては葉層の非横断性（葉の接戦の線型従属性）より正規化の過程で特異点集合の情報が絡んでくることから、満足のいく表現は得られていなかった。現在までに特異 WEB にたいする曲率形式の公式は、3-WEB についての Bordeaux 大学の Mignard の学位論文による長大な計算機結果、一般の d-WEB についての同じく Bordeaux 大学の Henaut による理論的特徴付け、本研究代表者による 3-WEB についての表現、またこれらに追随する Agafonov の計算と応用が知られている。しかしながら、これらの計算方法は、Henaut の Ann.Math. に発表された論文における理論的説明のなかに、それが原理的に可能であることを見ることができる以外、具体的には研究者それぞれにより秘密にされていることも事実である。

（３）本研究課題代表者は得られている曲率形式の解析により平面上の波面の進行の楔状の特異点集合の内部にみられる 3-WEB は、楔点から内部に伸びる曲線の上で曲率形式が０となることを既に得ている。

（４）また別の観点からは、Metivier, Joly（Bordeaux 大学）等により 3-WEB の平坦性、すなわち曲率形式が恒等的に０となる性質と、ある種の波動方程式の解のレゾナンスとの関係が指摘されている。この研究は現在も海洋波の数学理論の基礎となっている。波面の特異点の権威である V.I. Arnold により１９９０年代より、記録のない言い伝えであるが、これらの研究は、WEB 幾何学の研究でもっとも重要であり、今後も研究されるべきものであると強調されている。

（５）近年、Agafonov により曲率をもたない特異 3-WEB が分類された。また Dufour、Marin 等により独立にルジャンドル変換（射影双対）が平坦な 3-WEB となる射影平面の次数 3 の葉層が分類された。

２．研究の目的

（１）Blaschke により与えられた曲率形式を一般の特異 WEB 構造に拡張するために、まず 3-WEB に対し見通しのきく計算法を確立することを目指す。3-WEB W＝(F1,F2,F3) の Blaschke 曲率形式は葉層 F1,F2,F3 の順序を入れ替えても不変な平面 2-形式である。葉層 F1,F2,F3 が一階の常微分方程式 y’=g1(x,y), y’=g1(x,y), y’=g1(x,y)の解曲線により与えられているとしたとき、これらの定義式を同時に正規化したのちに曲率形式は定義されるが、結果としてそれは葉層の番号付けによらない。今３つの葉層が一斉に f(x,y,y’)=0　で与えられているとするとき、この定義式を前述のような３つの定義式に分解しそれにより求めた曲率形式は、結果として表面的には f （のテイラー係数だけ）により記述されていることになる。その記述表現こそが Blaschke 曲率形式の特異 3-WEB への一般化公式であり、それを求めることが、非常に基礎的な問題であるが、本研究課題の第一の目的である。

（２）4-WEB にたいして定められた曲率の中で最も重要なものは、４つの葉層のうちの３つで構成される４つの部分 3-WEB の曲率形式の平均化である。上述のように、f(x,y,y’)=0 が４つの式 y’=g1(x,y), y’=g2(x,y), y’=g3(x,y), y’=g4(x,y) に分解されるとき、これらのうちの３つから曲率形式を求め、それらを平均化することで、この曲率の f による表現を得る。

（３）２つの平面の局所 3-WEB の位相同型は，それらの WEB と同程度の微分可能性を持つことが知られている。この事実を一般の余次元１以外の WEB 構造に対して示す。

３．研究の方法

（１）はじめに 3-WEB に限定した考察をおこなう。３変数の対称式の変数による偏微分に関する様々な公式の証明を組織的に展開し、Blaschke による定義を特異 WEB に対して再構築することで、自然な曲率形式の表現を探し求める。対称式の微分公式とは、もっとも基本的な３変数基本１次対称式 S=x+y+z を例にとると、対称な和 ∂S^n/∂x dx+∂S^3/∂y dy+∂S^3/∂z dz は明らかに ∂S^n/∂SdS に等しいが、一般の高次対称式の偏微分と変数 x,y,z からなるこのような対称和にたいしても、その和をこのように対称式のみの言葉で記述する多くの非自明な公式が存在する。それらの公式を組織的に生成し用いることで、f(x,y,y’)=0 を微分 y‘＝dy／dx について解いた３つの解への分解 y’=g1(x,y), y’=g1(x,y), y’=g1(x,y) から得られた

3-WEB の曲率形式を g1,g2,g3 の対称式の言葉に整理することで f のテイラー係数のみを用いて表現する。

（２）4-WEB の曲率形式は、上述(1)のシナリオを踏襲すると、４変数の対称式の微分公式から自然に得られるはずである。そのため 3-WEB にたいする基本的考察を注意深く一般化する。

（３）WEB の曲率形式について Henaut 氏他の専門家と意見交換し、研究の方向性の妥当性、あるいは修正の必要性の有無を確認するとともに、新しい発想を探し求める。

（４）海洋波を専門とする数学の研究者と WEB 構造について意見交換をする。

４．研究成果
（１）当初の目的の１つであった曲率形式の計算の簡明化に成功した。計算過程の詳細は、発表の準備中である。3-WEB についての計算結果そのものは、既にごく一部の専門家には知られているものであり、またその結果に修正を加えるものでは無いが、一般への周知と記録保存のため、以下の５に示された論文に再録し公表した。

（２）位相剛性についての結果は次である。３次元空間のベクトル場 X, Y がリーブラケット [X,Y] とともに３次元空間を生成する条件のもとで、軌道のなす１次元 2-WEB は位相的剛性を持つ。

（３）多面体 3-WEB の発見。本研究課題の当初の申請期間の最終年度にあたる 2018 年３月のボルドー大学、IMB セミナーでの研究発表およびアラン・エノー氏との意見交換により、多面体群の対称性を持つ平面 3-WEB の考察は、本研究によるものが最初であることが明らかになった。これらの平坦 3-WEB の考察と、コンピュータによる描像の公表は現在準備中である。

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計　１件）
Web geometry of solutions of first order ODEs, Natural Science Report, Ochanomizu University,68, 1-2(2018)、pp7-16, http:hdl.handle.net/10083/000624196

〔学会発表〕（計　１件）
Seminaire de Geometrie, IMB, Universite de Bordeaux I, 2018, March 16, organized by Mickael Matusinski

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。