様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　５ 月 １７ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８３９

研究課題名（和文）ツイスタープログラムに基づく四元数ケーラー多様体内の部分多様体の研究

研究課題名（英文）The research of submaniolds in a quaternionic kaehler manifold based on the twistor program

研究代表者
長谷川　和志（Hasegawa, Kazuyuki）

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号：５０３４９８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：複素数を拡張した四元数とよばれる数の集合に基づく構造を持つ幾何学的な空間（四元数多様体とよばれる）内の曲面の研究を行った．四元数多様体に付随するより扱いやすくまた多くの研究蓄積のあるツイスター空間の道具立てを駆使して研究成果を得た．具体的には，四元数不変量を構成しその下限を与える曲面の特徴付けや，停留点を与えるような曲面の性質である．その一部は既知の結果を一般化したしたものであり，さらには改良したものとなっている．

研究成果の学術的意義や社会的意義
上記ような四元数構造は次元が低いときには，共形構造とよばれるものに一致する．したがって，当該の四元数幾何学の研究はこれまで多くの研究がなされている共形幾何学と同様に興味深い結果を得られると期待できるが，本研究で得られた結果はそのような視点で見た場合の部分多様体論における基礎的な結果といえる．

研究成果の概要（英文）：We study surfaces in a quaternionic manifold. Using the twistor space, which is associted with the quaternionic manifold and has many results, we obtain the results. In particular, we construct a quaternionic invariant for such surfaces, and find the lower bound and its characterization. Moreover the first variation formula is calculated. Some of these result give generalizations and improvements of known theorems.

研究分野：微分幾何学

キーワード：四元数多様体　ツイスター空間　ツイスターリフト

１．研究開始当初の背景

ツイスタープログラムとは，幾何構造 S の与えられた実多様体 M に対して，ツイスター空間とよばれる複素多様体 Z(M)を対応させ，元の実多様体の問題を複素多様体の問題に再定式化し研究する手法を指す．典型例として，自己双対多様体をそのツイスター空間で複素幾何学を展開することで研究することがあげられる．

当研究課題の対象である部分多様体論ついては，M の部分多様体で複素構造をもつΣからツイスター空間 Z(M)へのツイスターリフトとよばれる写像をもつような対象には多くの研究がある(R. Bryant や T. Friedrich 等)．特に，このリフトが正則であるという性質は S を保つ変換で不変なので興味深く重要な研究対象である．本研究では，M を四元数ケーラー多様体，S をその四元数構造とし，M の部分多様体Σでツイスターリフトを持つものを考え，ツイスタープログラムに基づき研究を行うことにより成果が得られると考えた．

研究代表者の長谷川は，近年は 4 次元自己双対アインシュタイン多様体内の曲面でそのツイスターリフトが正則となるものを，より一般の場合から研究してきた．その中で，可積分系や四元数正則曲面理論との関わり，及び，ある種の拡張・変形等を通じて，背景となるツイスタープログラムの考え方の重要性および有用性を認識するに至った．また，研究分担者の守屋は四元数正則曲面理論を研究している．この理論は，1 次元四元数射影空間 HP^1 において，HP^1 内の曲面の共形幾何を研究するために定式化されたものである．なお，4 次元多様体内の曲面のツイスターリフトの研究はこの理論の代数構造の一般化とみなせる．さらに，四元数射影空間 HP^n 内の(実)半分次元のケーラー部分多様体の研究は，上記の四元数正則曲面理論の高次元化とみることができる．これは四元数複素微分幾何学という範疇で扱われる対象となっている．本研究によって，これらをより統一的な見地から理解し，融合・発展できるのではないかと考えた．

２．研究の目的

幾何構造を持った実多様体に複素多様体を対応させて研究を行う上記のツイスタープログラムとよばれる手法は，これまでに多くの興味深い結果を導いている．それを可能にしている大きな理由の一つは，多くの研究がなされている複素幾何学を利用できることである．これは部分多様体論を展開する上でも有効で，様々な結果が期待できる．そこで，四元数ケーラー多様体内（より一般に四元数多様体）の部分多様体をこのプログラムに基づいて研究し，これまでに研究代表者，研究分担者らが行ってきた研究分野である曲面のツイスターリフトの研究，四元数正則曲面理論，四元数複素微分幾何学を，融合・発展させることを目的とする．

３．研究の方法

四元数ケーラー多様体内の部分多様体の性質を，ツイスタープログラムに基づいて研究する．この手法では，ツイスターリフトを通じて，すでに多くの研究蓄積のある複素幾何学の手法や結果を用いて研究することが可能となる．本研究において結果を得たい対象はある種の部分多様体，すなわち，複素多様体Σから四元数ケーラー多様体 M へのはめ込み f：Σ→M である．また，四元数ケーラー多様体 M のツイスター空間 Z(M)は，M 上の S^2-束として実現される．本研究では，はめ込みの性質をこのプログラムに基づいて研究する方法をとるので，調べるべき主要な対象はΣから Z(M)へのツイスターリフトとよばれる写像 I：Σ→Z(M)である．当研究では，この I を調べることにより，研究を進めていった．

４．研究成果

(１) 曲面から 4 次元ユークリッド空間へのある種の写像に関する分解表示:共形写像と名付けた写像に対して，4 次元ユークリッド空間のツイスター空間への写像を用いてその微分写像の分解表示を得た．これは，写像がはめ込みの場合にはそのガウス写像を与える外在的情報を持つ量と面積を表すこのできる内在的情報をもつ量で表され，これらを四元数構造を用いて結び付けた形となっている．よって，一般の場合へのよい示唆を与えている．また，特別な曲面については面積に関する不等式を得ることができた．

(２) 四元数不変量の構成:向きづけられた曲面から四元数多様体への inclusive とよばれるはめ込みに対して，そのツイスターリフトを考えた．ここでは，ツイスターリフトをある種の複素ベクトル束の切断として捉え，複素ベクトル束における諸量を詳細に分析した．これにより，四元数多様体上の四元数接続に依存しない不変量を構成できた．4 次元多様体の四元数構造は共形構造に一致するので，この場合には四元数不変量は共形不変量となるが，実際に構成した不変量はウィルモア汎関数に一致するものである．共形多様体内の部分多様体では法束が取れることに対して，四元数幾何の範疇ではそれは取れないので異なったアプローチを必要とするが，本研究ではツイスターリフトを詳細に調べ，複素ベクトル束の道具立てを用いて不変量を構成した．

（3）四元数不変量の下限：②で構成した四元数不変量の下限を曲面オイラー数やある複素ベクトル束の第一チャーン等の位相不変量で与えた．また，その値を実現するはめ込みはそのツイスターリフトが正則であるときに限る（そのようなはめ込みはツイスター正則とよばれる）ことを示した．その応用として，コンパクトなツイスター正則な曲面のオイラー数等を外の空間が四元数射影空間の場合にツイスターリフトの次数で表した．これはT. Friedrichの結果を一般化しかつ改良したものとなっている．

（4）四元数不変量の第一変分公式：①で得た四元数不変量の第一変分公式を導出し，いわばウィルモア曲面の四元数版に相当するようなはめ込みについて調べた．Burstall と Calderbank は４次元定曲率空間形内の曲面について，その平均曲率ベクトル場が正則切断あるときに，その曲面は制限ウィルモア曲面であることを示しているが，特にツイスターリフトが調和切断となるような曲面については，彼らの結果を一般化した結果が得られた．また，研究代表者によって研究されてきた４次元リーマン多様体内のツイスターリフトが調和切断となる曲面の四元数幾何学的な意味付けを与えることにもなっている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）
① K. Hasegawa, An inclusive immersion into a quaternionic manifold and its invariants, Manuscripta Math., 154 (2017), 527-549. DOI: 10.1007/s00229-017-0928-5. 査読有.
② K. Hasegawa and K. Moriya, Twistor lifts and factorization for conformal maps from a surface to the Euclidean four-space, Adv. Appl. Clifford Algebr., 27 (2017), 1243-1262. DOI 10.1007/s00006-016-0728-0. 査読有.
③ K. Hasegawa, Nearly Kahler submanifolds with vertically pluri-harmonic lifts, Hermitian-Grassmannian submanifolds, 49-58, Springer Proc. Math. Stat., 203 (2017). 査読有.
④ K. Moriya, The Schwarz lemma for super-conformal maps. Hermitian-Grassmannian submanifolds, 59-68, Springer Proc. Math. Stat., 203 (20107). 査読有.
⑤ K. Leschke and K.Moriya, Applications of quaternionic holomorphic geometry to minimal surfaces. Complex Manifolds 3 (2016), 282-300. 査読有.
⑥ K. Hasegawa and K. Miura, Extremal Lorentzian surfaces with null r-planar geodesics in space forms, Tohoku Math. J., 67 (2015), 611-634. 査読有.
⑦ K. Moriya, A factorization of a super-conformal map. Israel J. Math. 207 (2015), 331-359.査読有.

〔学会発表〕（計９件）
① K. Hasegawa, An inclusive immersion in a quaternionic manifold and its invariants, Differential Geometry, Banach center, Bedlewo(Poland), 2017年.
② 長谷川和志，四元数多様体への包含的はめこみとその不変量，研究集会「部分多様体の幾何学とその発展，東京理科大学，2017年.
③ 長谷川和志，A quaternionic Willmore immersion，日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会，関西大学，2016年.
④ 長谷川和志，A quaternionic invariant for an inclusive immersion，日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会，関西大学，2016年.
⑤ K. Hasegawa, An inclusive immersion in a quaternionic manifold and its invariants, Quaternion differential geometry and related topics，お茶の水女子大学，2016年.
⑥ 長谷川和志，四元数多様体への包含的はめこみとその不変量,研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2016」，東京理科大学，2016年.
⑦ K. Hasegawa and K. Moriya, Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface, 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds，大邱(大韓民国)，2016年.
⑧ 長谷川和志，守屋克洋，Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface Ⅰ，日本数学会年会幾何学分科会，筑波大学，2016年.
⑨ 長谷川和志，守屋克洋，Twistor lifts and factorization for conformal maps of a surface Ⅱ，日本数学会年会幾何学分科会，筑波大学，2016年.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~kazuhase/

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：守屋　克洋

ローマ字氏名：Moriya Katsuhiro

所属研究機関名：筑波大学

部局名：数理物質科学研究科（系）

職名：助教

研究者番号（8 **桁）：**30163760