様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　５ 月 ２３ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５K０４８４４

研究課題名（和文）フィンスラー多様体の比較幾何と勾配流

研究課題名（英文）Comparison geometry of Finsler manifolds and gradient flows

研究代表者
太田　慎一（Ohta, Shin-ichi）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：００３７２５５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、まずフィンスラー多様体という角度が定義できない幾何学的な対象において、その曲がり方に関係する研究を多面的に進め、空間の最短線への分解によるneedle分解という技法を用いて等周不等式を、熱流の解析に基づく非線形ガンマ解析を用いて等周不等式及び解析的な不等式を確立した。また、距離空間上の凸関数の勾配流について、曲率が1以下の距離空間上での勾配流の収縮性、曲率が0以下の距離空間上の準凸関数の勾配曲線の弧長の有限性、をそれぞれ示した。さらに、リッチ曲率が正の測度距離空間上のラプラシアンの正の最小固有値が最良の値を達成する場合に、空間が1次元ガウス空間との直積に分解することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
フィンスラー多様体は、距離の非対称性や熱流の非線形性など、従来のリーマン多様体では捉えられない現象の記述を可能にする幾何学的対象として、普遍的な価値を持つ。本研究で得られた成果はフィンスラー多様体の「曲がり方」に関する研究で強力な武器となるneedle分解とガンマ解析に基づくもので、今後の発展が見込まれる。また、凸関数の勾配流は最適化理論など工学的にも重要なものであり、本研究の成果はその理論的な理解を一歩進めるものである。

研究成果の概要（英文）：We investigated Finsler manifolds with weighted Ricci curvature bounded below, and established an isoperimetric inequality via the needle decomposition, as well as isoperimetric and functional inequalities via the nonlinear Gamma calculus. We also studied gradient flows of convex functions on metric spaces, and showed the contraction property of gradient flows in CAT(1)-spaces, and the rectifiability (finiteness of the length) of gradient curves of quasi-convex functions on CAT(0)-spaces. Furthermore, we showed that a metric measure space of positive Ricci curvature with the sharp spectral gap necessarily splits off a one-dimensional Gaussian space.

研究分野：リーマン多様体、フィンスラー多様体、測度距離空間での比較幾何・幾何解析の研究

キーワード：フィンスラー多様体　リッチ曲率　局所化　等周不等式　凸関数　勾配流　収縮性　分解定理

１．研究開始当初の背景

フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率を用いた比較幾何･幾何解析は代表者と Sturm の一連の研究により飛躍的に進んでいた。一方、リーマン多様体では、当時発表されたばかりであった Klartag の needle 分解（局所化）の理論によって、重みつきリッチ曲率が下に有界な状況での Levy-Gromov 型等周不等式の画期的な別証明が得られており、そのフィンスラー多様体への拡張が議論されていた。凸関数の勾配流に関しては、リーマン的な種々の空間（非正曲率を持つ CAT(0)空間、リーマン的曲率次元条件をみたす測度距離空間など）での進展の一方で、フィンスラー多様体、ノルム空間での定量的な評価は全く知られておらず、長らく重要な未解決問題とされていた。

２．研究の目的

Klartag による needle 分解の理論をフィンスラー多様体に拡張し、Levy-Gromov 型等周不等式をフィンスラー多様体で示すことと､さらに解析的な不等式などへの応用を目指していた。従来の Levy-Gromov 型等周不等式の証明は、幾何学的測度論に基づく高度に技術的な正則性理論に依存しており、フィンスラー多様体へは拡張されていなかった。また、フィンスラー多様体、ノルム空間上の凸関数の勾配流の挙動の解析を進め、曲率やノルムの凸性などについての適切な条件の下で、定量的な評価を得るための突破口を開くことを目指していた。

３．研究の方法

まず needle 分解については、Klartag の研究から程なくして Cavalletti-Mondino が曲率次元条件を満たす測度距離空間への拡張を行ったため、それも参考にしてフィンスラー多様体での研究を行った｡その過程で needle 分解ではフィンスラー計量の非対称性に対応できないことがわかったため、非線形ガンマ解析によるより解析的な研究も行った。凸関数の勾配流については直接目標につながる結果は得られなかったが、フィンスラー多様体とリーマン多様体の違いである角度の概念の役割を精査し､CAT(1)空間上の凸関数の勾配流の研究につなげた｡また、Daniilidis らによって導入されていた自己収縮曲線の概念に着目し、その弧長の有限性に関する研究を CAT(0)空間において行った。ノルム空間では凸関数の勾配流は一般に自己収縮性を持たないと思われるが、自己収縮曲線の有限性は Stepanov-Teplitskaya（2017）により示されている。

４．研究成果

大きく分けて、次の 3 つの成果を得た。(1)と(2)は研究の目的及び研究の方法で述べた 2 つの問題に関係するものであり、(3)はそれらとは独立して研究を進めたものである。

(1) フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率を用いた比較幾何・幾何解析の研究を進め、needle 分解の理論と非線形ガンマ解析によって、等周不等式、対数ソボレフ不等式、ソボレフ不等式を示した。

(2) 距離空間上の凸関数の勾配流の研究を進め、CAT(1)空間での勾配流の収縮性や発展変分不等式、また CAT(0)空間での有界な勾配曲線の弧長有限性を示した。後者は自己収縮曲線の理論に基づく。

(3) リーマン的曲率次元条件 RCD(K,∞)（K は正数）をみたす測度距離空間において、スペクトル・ギャップで等号が成り立つ場合に、空間が 1 次元ガウス空間との直積と等長的になるという分解定理を示した。これは Cheng-Zhou（2017）による重みつきリーマン多様体での結果の拡張である。

以下、それぞれについて順に概説する。①、②等は「５．主な発表論文等」での雑誌論文の番号である。

(1) フィンスラー多様体の研究では、needle 分解と非線形ガンマ解析という強力な理論をフィンスラー多様体上で展開し、幾何学的な不等式の研究を行った。考えるのは、フィンスラー多様体とその上の測度の組に対し、測度に応じてリッチ曲率を変形した重みつきリッチ曲率が定数以上である状況である。重みつきリッチ曲率は実パラメータ N を含み、これを特に N リッチ曲率と呼ぶことにする｡N リッチ曲率が定数 K 以上であることは、曲率次元条件 CD(K,N)と同値である。needle 分解とは、凸解析に起源を持つもので、近年 Klartag（2017）の画期的な研究によりまずリーマン多様体で確立され、さらに Cavalletti-Mondino（2017）が曲率次元条件をみたす測度距離空間へと拡張した。基本的な考え方は、与えられた空間上の不等式を、適切に構成された測地線による分解を通して各測地線上での不等式に帰着させるものであり、1 次元では具体的な解析による詳細な評価が可能であることから、見通しが良く適用範囲も広い証明が得られる。特に Levy-Gromov 型の等周不等式において、従来の幾何学的測度論における高度に技術的な正則性理論を経由しない別証明を与え、注目を浴びた。正則性を必要としないことから、曲率次元条件をみたす測度距離空間でも同様の等周不等式が得られ、これは Alexandrov

空間や計量が対称なフィンスラー多様体でも未知のものであった。Cavalletti-Mondinoの結果は通常の距離空間でのもののため、計量が対称でないフィンスラー多様体には適用されない。そこで論文③では、計量が対称とは限らない一般のフィンスラー多様体でneedle分解の構成を行い、Levy-Gromov型の等周不等式を示した。その研究の中で、needle分解による議論では計量の非対称性が影響を与え、対称な場合より悪い評価しか得られないことが明らかになった。これは、needle分解による手法の現時点での限界を示すものとして、興味深い。

続けて、needle分解における非対称性の問題点を解消するため、Sturmとの以前の共同研究（2009, 2014）において確立した熱流とBochner不等式に基づくガンマ解析の非線形板を進め、Bakry-Ledoux型の等周不等式と対数ソボレフ不等式、ソボレフ不等式（投稿中の論文及び論文⑤）を示した。論文④はこれらについての概説論文である。Bakry-Ledoux 型の等周不等式は、上記のLevy-Gromov型の等周不等式でNが∞の場合に対応するもので、この場合に限りガンマ解析による解析的な証明が知られている。この証明法では計量の非対称性は影響せず、リーマン多様体の場合と同じ（したがって最良の）評価が得られた。対数ソボレフ不等式、ソボレフ不等式でも同様にリーマン多様体と同じ不等式が得られるが、非対称である場合にはソボレフ不等式で許容される次数の範囲が少し狭くなる。この範囲の違いを解消できるかは未解決である。フィンスラー多様体における Bochner 不等式は、p ラプラシアンの固有値の評価やその等号成立条件など、既に多くの応用を持つ。本研究における非線形ガンマ解析の理論の発展により、より多くの応用が期待できる。

(2) 凸関数の勾配流の研究では、まずPalfia氏（研究協力者）との共著論文⑥において、CAT(1)空間上の凸関数の近接法に基づく勾配流の構成の研究を行った。CAT(1)空間とは三角形比較定理の意味で断面曲率が1以下の距離空間であり、曲率が0以下のCAT(0)空間より複雑な位相構造を持つ。この研究では、CAT(1)空間で角度が意味を持つことから導かれる、距離の第一変分公式における一種の「可換性」に着目し、それを効果的に用いることでCAT(0)空間上での理論で本質的な役割を果たす不等式をCAT(1)空間に拡張することに成功した。この不等式を用いて、凸関数の勾配流に関する重要な性質（収縮性、発展変分不等式）が得られる。さらに応用として、凸関数の和の勾配流の近接法による近似に関するTrotter型の積公式を、CAT(1)空間に拡張した。この研究は、角度が意味を持つという空間の「リーマン性」がどのように勾配流の振る舞いに影響を与えるかを明らかにするものとして、評価されている。

勾配流に関係するもう一つの研究として、Daniilidisら（2010）によって導入された自己収縮性（self-contractedness）という概念に着目した。自己収縮性は、距離空間内の曲線についての性質で、その曲線上の点から振り返ってみたときに、曲線上を動く点がその点に単調に近づいてくることとして定義される。この性質により、曲線は渦巻いたり極端に蛇行することはできない。自己収縮性は発展変分不等式から導くことができ、したがってリーマン多様体やCAT空間上の凸関数の勾配曲線は自己収縮曲線である。凸関数の最適化理論に関係する問題として、Daniilidisらはユークリッド空間やリーマン多様体において、有界な自己収縮曲線の弧長が有限であることを示した（2015、2018）。このうちユークリッド空間では弧長の定量的な評価を与えており、特に空間の有限次元性が弧長の有限性に本質的に必要であるという興味深い関係がある。一方、リーマン多様体での証明はコンパクト性による非定量的なものであった。論文②ではユークリッド空間での議論をより精密に行い、さらにそれをアダマール多様体（単連結非正曲率リーマン多様体）に適切に（定量的に）拡張した。また、その議論を精査することで、適切な有限次元的な条件をみたす CAT(0)空間でも有界な自己収縮曲線の弧長が有限であることを示した。自己収縮性が距離空間でも意味がある概念であることから、多様体ではない特異性を持つ空間でもその研究を行うことは自然であり、この論文での結果が多様体以外で初めて得られたものである。その後、Zolotov がラムゼー理論を用いた異なる手法で自己収縮曲線の弧長の有限性をより広い距離空間の族に拡張しており、自己収縮曲線の理論は広がりを見せている。

(3) Cheng-Zhou（2017）により、重みつきリーマン多様体において∞リッチ曲率が正定数K以上であるとき、スペクトル・ギャップ（またはポアンカレ不等式）での等号が成立するのは、1次元低いリーマン多様体（再び∞リッチ曲率がK以上となる）と1次元ガウス空間の直積と等長なときに限ることが知られている。これは、古典的な小畠の定理の∞リッチ曲率版と見なされる。Gigli 氏、Ketterer 氏、桑田氏（研究協力者）との共著論文①では、この Cheng-Zhou の結果をリーマン的曲率次元条件RCD(K,∞)をみたす測度距離空間に拡張した。Cheng-Zhouの証明は、Bochner 不等式の等号成立条件を元に、固有関数を Cheeger-Gromoll の分解定理におけるBusemann関数のように用いるものであり、ベクトル場やde Rham分解などの多様体構造を利用する理論が必要であった。測度距離空間ではこれらを使用できず、また特に RCD(K,∞)空間の枠組では有限次元的な評価が使えないため、技術的に大変困難な問題になる。この研究では、Gigliによる Cheeger-Gromoll 型の分解定理（2013）に部分的に沿いながら、無限次元性による技術的困難を解消するためにAmbrosio-Trevisan（2014）による regular Lagrange 流、Gigli らによる RCD(K,∞)空間での解析的な道具立てなど最新の理論をうまく組み合わせることで、結論を導いた。幾何学的・幾何解析的な不等式（スペクトル・ギャップ、対数ソボレフ不等式、等周不等式など）の等号成立条件、また等号に近い場合の空間の安定性（等号が成り

立つ状況に近いことを示す定量的な評価）は近年活発に研究されており、その理解に貢献する研究である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　6　件）

① Nicola Gigli, Christian Ketterer, Kazumasa Kuwada, Shin-ichi Ohta: “Rigidity for the spectral gap on RCD(K,∞)-spaces”, Amer. J. Math., 印刷中, 査読有.
https://arxiv.org/abs/1709.04017

② Shin-ichi Ohta: “Self-contracted curves in CAT(0)-spaces and their rectifiability”, J. Geom. Anal., 印刷中, 査読有.
DOI:10.1007/s12220-018-00126-7

③ Shin-ichi Ohta: “Needle decompositions and isoperimetric inequalities in Finsler geometry”, J. Math. Soc. Japan **70** (2018), 651-693, 査読有.
DOI:10.2969/jmsj/07027604

④ Shin-ichi Ohta: “Nonlinear geometric analysis on Finsler manifolds”, Eur. J. Math. **3** (2017), 916-952, 査読有.
DOI:10.1007/s40879-017-0143-7

⑤ Shin-ichi Ohta: “Some functional inequalities on non-reversible Finsler manifolds”, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **127** (2017), 833-855, 査読有.
DOI: 10.1007/s12044-017-0357-0

⑥ Shin-ichi Ohta, Miklos Palfia: “Gradient flows and a Trotter-Kato formula of semi-convex functions on CAT(1)-spaces”, Amer. J. Math. **139** (2017), 937-965, 査読有.
DOI:10.1353/ajm.2017.0025

〔学会発表〕（計　10　件）

① Shin-ichi Ohta: “Rectifiability of self-contracted curves with applications”, Workshop on barycenters, convexity on metric measure spaces and positive operators, 2018.

② Shin-ichi Ohta: “On weighted Ricci curvature of negative effective dimension”, Intense Activity Period “Metric Measure Spaces and Ricci Curvature”, 2017.

③ Shin-ichi Ohta: “On weighted Ricci curvature of negative effective dimension”, CMC conference: Optimal transport and related topics, 2017.

④ Shin-ichi Ohta: “Spectral gap and rigidity under positive Ricci curvature”, 23rd Rolf Nevanlinna Colloquium, 2017.

⑤ Shin-ichi Ohta: “Rigidity for the spectral gap inequality on RCD(K,∞)-spaces”, Curvatures of Graphs, Simplicial Complexes and Metric Spaces, 2017.

⑥ Shin-ichi Ohta: “Some functional inequalities on non-reversible Finsler manifolds”, Optimal Transport and Applications, 2016.

⑦ Shin-ichi Ohta: “Nonlinear geometric analysis on Finsler manifolds: Some functional inequalities”, Follow-up Workshop to JTP “Optimal Transportation”, 2016.

⑧ Shin-ichi Ohta: “Isoperimetric inequalities on Finsler manifolds”, The Asian Mathematical Conference, 2016.

⑨ Shin-ichi Ohta: “Localization and isoperimetric inequalities in Finsler geometry”,

第50回フィンスラー幾何学シンポジウム，2015.

⑩ Shin-ichi Ohta：“Localization method and isoperimetric inequalities”, Trends in Modern Geometry 2015 & 10th Pacific Rim Complex Geometry Conference, 2015.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sohta/

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：桒田　和正
ローマ字氏名：(KUWADA, Kazumasa)

研究協力者氏名：パルフィア　ミクローシュ
ローマ字氏名：(PALFIA, Miklos)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。