

令和元年6月18日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04846

研究課題名(和文) 共形写像に関連する変分問題と計量のpullbackに関する変分問題の研究

研究課題名(英文) Research on a variational problem related to conformal maps and a variational problem of pullback of metrics

研究代表者

中内 伸光 (Nakauchi, Nobumitsu)

山口大学・大学院創成科学研究科・教授

研究者番号：50180237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は、リーマン多様体  $M$  からリーマン多様体  $N$  へのなめらかな写像  $f$  に対して、ある共変テンソルが消えることと写像  $f$  が弱共形 (weakly conformal) であることが同値であることに着目した。写像の共形性を測る積分量やそれを最小化する(停留値を与える)写像としての  $C$ -stationary map の概念を導入し、成果を得ている。また、その研究過程で、上記の積分量を分解する際に得られた積分量をもとに、計量の pullbacks の汎函数とそれに伴う symphonic map という概念を導入して、研究を進め、成果を得ている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2つのリーマン多様体間の写像の共形性に関して、 $C$ -stationary map という新しい概念を導入した。 $C$ -stationary map により、2つの多様体の共形構造の違いを測るなどの応用が期待できる。 $C$ -stationary map の定義方程式は、新しいタイプの主要項をもち、研究が進めば、方法論に貢献できる。さらに、この研究過程で新しい汎函数が得られ、symphonic map という概念を与えたが、「計量の pullback」という観点からは、「harmonic map という概念の counterpart としての位置づけ」が得られる。

研究成果の概要(英文)：I focused on a covariant tensor for a smooth map  $f$  between Riemannian manifolds. This tensor vanishes if and only if such a map  $f$  is weakly conformal. I introduced an integral quantity and a concept of  $C$ -stationary map using this tensor and give some results on these maps. Furthermore I decomposed the quantity and obtained a functional of an integral of pullbacks of metrics. Using this functional, I introduced a concept of symphonic map, which is a counterpart of the concept of harmonic maps in a viewpoint of pullbacks of metrics. I give some results on these maps.

研究分野：多様体上の変分問題

キーワード：多様体 変分問題 共形写像 variational problem conformal map pullback symphonic map  $C$ -stationary map

## 1. 研究開始当初の背景

2次元曲面の場合には、曲面上の複素構造の“モジュライ空間”である Teichmüller 空間に、2つの曲面の間の擬等角写像(quasiconformal map)を用いて、Teichmüller 距離と呼ばれる距離が導入される。2次元曲面では複素構造を共形構造(等角構造)と見なすことができ、2つの共形構造の違いを擬等角写像で測っていることになる。さらに、近年、Tromba 等により、擬等角写像の代わりに、調和写像(harmonic map)を用いた Teichmüller 理論へのアプローチが与えられた。

この研究課題の代表者は、共形性(等角性)に関係する、あるテンソルに気がついた。2つのリーマン多様体  $M$ ,  $N$  に対して、 $M$  から  $N$  へのなめらかな写像  $f$  に対して、2階の共変テンソル

$$T_f = f^*h - \frac{1}{m} \|df\|^2 g$$

に着目する。ここで、 $f^*h$  は  $f$  による計量  $h$  の pullback であり、 $m$  は多様体  $M$  の次元である。このテンソルが消えることと写像  $f$  が弱共形(weakly conformal)であることは同値であり、写像の共形性を測るテンソルである。このノルムの積分

$$\Phi(f) = \int_M \|T_f\|^2 dv_g$$

を考えると、写像の各ホモトピークラスにおいて、この汎関数  $\Phi(f)$  を最小にする写像は、そのホモトピークラスの中で共形写像に“最も近い”写像であると期待できるのではないか？このような発想から研究にとりかかった。

## 2. 研究の目的

汎関数  $\Phi(f)$  の Euler-Lagrange 方程式を計算してみると、微分作用素の**主要項が退化している上に、楕円型ではなく、変分問題の通常的手法や方法論を用いることができない**。本研究課題の代表者は、ここで、上記の汎関数  $\Phi(f)$  を

$$(*) \quad \Phi(f) = F(f) - \frac{1}{m} E_4(f)$$

と2つのパートに分解した。このような分解はちょうど、例えば、「全スカラー曲率」(スカラー曲率の積分)という「計量の汎関数」を Ricci flow の方向と Yamabe flow の方向に分解して、それぞれの方向について議論を展開することにより、実りのある結果が得られたという例もある。この分解 (\*) で得られたエネルギー汎関数  $F(f)$  と  $E_4(f)$  はそれぞれが興味深い構造をもっている。前者のエネルギー  $F(f)$  は

「計量の pullback のノルムの積分」

である。一方、多様体上の変分問題で重要な概念である harmonic map のエネルギーは

「計量の pullback のトレースの積分」

と見なせるので、エネルギー  $F(f)$  から導かれる写像は

「計量の pullback」という観点

で見ると、

「harmonic map という重要な概念の counterpart としての位置づけ」

ができる。また、分解(\*)のもうひとつのパートである 4-エネルギー  $E_4(f)$  については、

もっと一般の  $p$ -エネルギー

$$E_p(f) = \int_M \|df\|^p dv_g \quad (p \geq 2)$$

と、その停留写像である  $p$ -調和写像 ( $p$ -harmonic map) として、すでに多くの研究がなされている。

上記の状況のもとで、この研究課題の目的は2つある：

- (1) 汎関数  $F(f)$  の停留解 (symphonic map と呼ぶ) の存在、正則性、および、性質を調べること
- (2) 汎関数  $\Phi(f)$  の停留解 (C-stationary map と呼ぶ) の存在、正則性、および、性質を調べること

### 3. 研究の方法

研究の動機となる汎関数  $\Phi(f)$  に比べて、汎関数  $F(f)$  の Euler-Lagrange 方程式は、退化はしているが楕円型であり、したがって、C-stationary maps に比べて symphonic maps の方が比較的取り扱いやすい。上記の目的(1)の研究を押し進め、そのときに得られた結果や方法論を用いて、目的(2)の研究を行う。

研究方法は、「多様体上の変分問題」や「大域解析学」の手法をもとに、議論を行った。ただ、汎関数  $\Phi(f)$  および汎関数  $F(f)$  の Euler-Lagrange 方程式の主要項が独特の退化した構造をもち、これまででない工夫や議論が求められる。symphonic maps や C-stationary maps の概念は、研究代表者が定義した概念であり、これまでの方法を直接適用できない場合も多く、工夫やアイデアが必要となる。

### 4. 研究成果

本研究課題については、symphonic maps に関して、以下の様な結果が得られた：

- (1) (symphonic maps の heat flow の大域解の存在) 4次元ユークリッド空間の部分領域から、 $n$ 次元球面への symphonic maps の heat flow の大域解の存在の結果が得られた。(発表論文)
- (2) (symphonic maps の stress energy tensor) symphonic maps に対して、stress energy tensor を定義し、それが、定義域の計量を変形したときの gradient であることを示した。(発表論文)

また、少し一般的な結果として

- (3) (弱解の wedge による特徴づけ)  $n$ 次元球面への写像に対して、一般的な、ある種の微分方程式の弱解であることを、wedge を用いて特徴づけた。(発表論文)

また、本研究課題の研究に必要な方法やアイデアを得るために

(4) biharmonic maps についても並行して研究を続けている。(発表論文 , , )

C-stationary maps の方は, symphonic maps に比べて取り扱いが非常に難しく, 発表できる結果はあまり得られていないが, 問題個所の認識が深まり, 研究は進展している.

本研究課題については, 汎関数  $\Phi(f)$  および C-stationary maps の解析が予想以上に難航したため, 「最終年度の前年度応募」を行い,

基盤研究(C) (一般)

「共形写像に関連する変分問題と計量の pullback に関する変分問題の研究」

(2018 年度~2021 年度, 課題番号 18K03280)

として, この研究課題について, さらに詳しく研究を進めている.

最後になりましたが, 3 年間の研究期間において, この研究課題の遂行をサポートしていただいた研究分担者, および, 研究集会などで議論をさせていただいた研究者の方々にお礼申し上げます. また, この研究課題に科研費を交付していただいた日本学術振興会に感謝致します.

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

- Nobumitsu Nakauchi, Stress energy tensor for symphonic maps, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 査読有, in press, 2019.  
DOI:10.1007/s40574-018-0168-y
- Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi, Remarks on weakly stationary maps into spheres characterized by wedge product, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 査読有, vol.68, 2019, 227-236.  
DOI:10.1007/s12215-018-0350-1
- Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi, Global existence for the heat flow of symphonic maps into spheres, Advances in Differential Equations, 査読有, vol.23, 2018, 693-724.
- Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Polyharmonic maps into the Euclidean space, Note di Matematica, 査読有, vol.38, 2018, 89-100.  
DOI:10.1285/i15900932v38n1p89
- Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi, A Holder continuity of symphonic maps into the spheres, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読有, vol.55, 2016, 1-20.  
DOI:10.1007/s00526-015-0940-0
- Shigeo Kawai and Nobumitsu Nakauchi, Stability of stationary maps of a functional related to pullbacks of metrics, Differential Geometry and its Applications, 査読有, vol.44, 2016, 161-177.  
DOI:10.1016/j.difgeo.2015.11.005
- Shun Maeda, Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Triharmonic isometric immersions into a manifold of non-positively constant curvature, Monatshefte für Mathematik, 査読有, vol.177, 2015, 551-567.

DOI:10.1007/s000605-014-0713-4

— Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Bubbling phenomena of biharmonic maps, *Journal of Geometry and Physics*, 査読有, vol.98, 2015, 355-375.  
DOI:10.1016/j.geomphys.2015.07.013

〔学会発表〕(計3件)

Nobumitsu Nakauchi, 写像の共形性に関する変分問題と, その研究過程で現れた変分問題, 2018年10月26日, 研究集会「多様体上の微分方程式」, 金沢シリーズ第17回, 金沢大学サテライトプラザ.

Shigeo Kawai and Nobumitsu Nakauchi, 計量の pullback に関連したある汎函数の stationary map について, 2017年3月24日, 日本数学会, 首都大学東京.

Nobumitsu Nakauchi, A new approach to conformal maps between Riemannian manifolds from a viewpoint of a variational problem, 2016年3月5日, 内藤博夫先生退職記念研究集会, 山口大学.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### 研究分担者

内藤 博夫 (Naitoh, Hiroo)

山口大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号: 10127772

### 研究分担者

近藤 慶 (Kondo, Kei)

山口大学・大学院創成科学研究科・准教授

研究者番号: 70736123