様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月１２日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ０４８４７

研究課題名（和文）ラグランジュファイバー空間の微分幾何とフレアー理論

研究課題名（英文）Differential geometry and Lagrangian Floer theory for Lagrangian fibrations

研究代表者
野原　雄一（Nohara, Yuichi）

明治大学・理工学部・専任准教授

研究者番号：６０４４７１２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：2次元部分空間のなす平面Grassmann多様体上には自然に複数の完全可積分系を構成することができ，それぞれのSYZミラーがGrassmann多様体のミラーのクラスター座標近傍と一致する。本研究では，これらの完全可積分系たちをつなぐ完全可積分系の族を構成し，その特異ファイバーによって起こるFloer理論的量の壁越え公式がミラー側のクラスター変換と一致することを示した。
また，6次元ベクトル空間内の3次元部分空間全体のなすGrassmann多様体の場合にも，Gelfand-Cetlin系と呼ばれる完全可積分系に対して壁越え公式を計算し，それがミラー側のクラスター変換と一致することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Grassmann多様体とそのミラーは表現論やクラスター代数の観点からも非常に重要な例である。ミラー対称性とクラスター代数の関係はある程度一般的な現象だと考えられているが，その証明は多くの場合，Floer理論のトロピカル極限で構成されている。一方本研究では，平面Grassmann多様体の場合にLagrangeトーラスの幾何を直接扱うFloer理論を用いて，ミラー側にクラスター代数の構造が現れることを示している。また，Gr(3,6) の場合に得られた壁越え公式の中には，Plucker座標ではないクラスター変数が現れる例が含まれる。これはより一般の場合を理解するための重要な例になると思われる。

研究成果の概要（英文）：The two-plane Grassmannian Gr(2,n) has several completely integrable systems, and each of which gives a cluster torus of the Landau-Ginzburg mirror of Gr(2,n) by SYZ mirror symmetry. We construct families of completely integrable systems which interpolate the above mentioned completely integrable systems, and show that the Floer theoretic wall-crossing formula for the completely integrable systems coincides with the cluster transformation in the mirror side.
We also computed the wall-crossing formula for a completely integrable system, called the Gelfand-Cetlin system, on the Grassmannian Gr(3,6) of 3-dimensional subspaces in the 6-dimensional vector space, and proved that it induces the cluster transformation in the mirror side.

研究分野：シンプレクティック幾何

キーワード：Grassmann多様体　ミラー対称性　クラスター代数　壁越え公式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ミラー対称性とは，Kaehler 多様体 X 上のシンプレクティック幾何と，X のミラー多様体 Y 上の複素幾何の間の様々なレベルの双対性の総称である。X が Fano 多様体とよばれるクラスの多様体の場合には，そのミラーは多様体 Y とその上の関数 W（スーパーポテンシャル）の組 (Y,W) となる（Landau-Ginzburg 模型とよばれる)。この対応を幾何学的に説明する描像が，X と Y に双対トーラスをファイバーとする Lagrange トーラスファイブレーションの構造が存在することを主張する Strominger-Yau-Zaslow（SYZ）予想である。例えば X がトーリック多様体の場合には，X の標準的な Lagrange トーラスファイブレーション（運動量写像）に対する SYZ ミラーとして Landau-Ginzburg ミラーが得られる。より正確には，トーリック多様体のトーラスファイバーに対して定まるポテンシャル関数（Lagrange 部分多様体の交差に関する Floer 理論のある種の“不変量”）が，トーリック多様体の Landau-Ginzburg ミラーを与えることが示されている（深谷-Oh-太田-小野[2]）。

旗多様体もミラー対称性において重要な例の一つである。（A 型の）旗多様体には Gelfand-Cetlin 系とよばれる完全可積分系（すなわち Lagrange トーラスファイブレーション）が存在する。このトーラスファイバーのポテンシャル関数がミラーのスーパーポテンシャルに一致することも証明されている（西納-野原-植田[3]）。しかし，トーリック多様体の場合とは異なり，Gelfand-Cetlin 系から得られるのはミラー多様体の一つの座標近傍だけである。正しいミラー多様体を得るためには，この座標近傍の部分コンパクト化をとる必要がある。

このギャップについて最もよく理解できているのが，複素ベクトル空間内の 2 次元部分空間全体のなす平面 Grassmann 多様体 Gr(2,n) の場合である。一般に，Grassmann 多様体 Gr(k,n) のミラー多様体は，双対 Grassmann 多様体 Gr(n-k,n) のある開集合となることが Rietsch により示されている。この空間は，クラスター変数とよばれる変数を座標に持つ座標近傍(クラスター座標近傍)たちを貼り合わせてできるクラスター多様体の構造を持っている。Gr(2,n) の場合は，クラスター変数は Plücker 座標に他ならない。これまでの研究で，Gr(2,n) 上には（Geland-Cetlin 系を一般化した）完全可積分系を組織的に構成できることが分かっている。さらに，それぞれに対する Floer 理論からミラー側のクラスター座標近傍とその上のスーパーポテンシャルが得られることが証明されている（野原-植田[4]）。

２．研究の目的

(1) Grassmann 多様体上の Floer 理論における壁越え公式とそのミラー：
平面 Grassmann 多様体 Gr(2,n) 上には複数の完全可積分系が存在し，それぞれに対する Floer 理論から，Landau-Ginzburg ミラーの座標近傍（クラスター座標近傍）と，その上へのスーパーポテンシャルの制限が得られる。クラスター座標近傍たちはクラスター変換（もしくは変異）とよばれる座標変換で互いに貼り合っている。この座標変換を Gr(2,n) 上の Floer 理論の立場から理解することが目的である。一般に，異なる完全可積分系の Lagrange トーラスファイバーの間の Floer 理論は，壁越え公式とよばれる変換で結びついていると考えられている（Auroux[1]）。Gr(2,n) の場合に，この壁越え公式とミラー側のクラスター変換の関係を調べる。

(2) より一般の多様体上の完全可積分系の構成とその Floer 理論的性質：
一般の Grassmann 多様体や旗多様体の場合には，Gelfand-Cetlin 系以外の完全可積分系の理解があまり進んでいないため，完全可積分系の構成とその Lagrange トーラスファイバーの幾何学の研究は重要な課題であるといえる。そこで本研究では，Grassmann 多様体や旗多様体のトーリック退化を用いることで完全可積分系を構成し，その特異ファイバーの様子を調べる。それらに対する壁越え公式を具体的に記述し，ミラー側のクラスター変換との関係を理解することが最終的な目的となる。

(3) Grassmann 多様体上の“テータ関数”の研究：
Lagrange ファイブレーションに対する Floer 理論は，ミラー側のある正則ベクトル束の切断とも関わる。例えば Abel 多様体の場合には，Lagrange 部分多様体の交差理論からミラー側のテータ関数たちの積構造を見ることができる。また，Fano 多様体の場合には，ミラー側のスーパーポテンシャルが“テータ関数”の組み合わせで記述される。そこで，Grassmann 多様体の場合に，上の目的(1), (2)で考える完全可積分系に対応してミラー側に現れる“テータ関数”を詳しく調べる。

３．研究の方法

トーリック多様体の場合に Floer 理論が詳しく理解できた要因のひとつは，Lagrange 部分多様体の交差の“量子補正”（正則円板の数え上げ）を具体的に記述できたことである。トーリック多様体以外の場合ではこれが期待できない。旗多様体上でポテンシャル関数を計算する際には，トーリック多様体への退化を用いることでこの問題を解消した。このトーリック退化を考えることは，完全可積分系を新たに構成する際にも有効な方法となる（Harada-Kaveh）。本

研究でも，トーリック退化が重要な役割を果たすことになると考えられる。ミラー側でそれぞれのクラスター座標近傍に対応するべきトーリック退化の様子を詳しく調べることが重要なステップとなる。

４．研究成果

(1) 平面 Grassmann 多様体 Gr(2,n) 上には，n 角形の三角形分割を選ぶごとに完全可積分系を構成することができる。一方，Gr(2,n) のミラー多様体（双対 Grassmann 多様体の開集合となる）は，三角形分割と一対一に対応する座標近傍（クラスター座標近傍）を持つ。この座標近傍たちを貼り合わせるための座標変換（クラスター変換）が，Gr(2,n) 上の完全可積分系たちの間の壁越え公式と一致することを示した。より詳しくは以下の通りである。対角線を一つ取り換えることで移り合う二つの三角形分割に対して，Gr(2,n) 上に二つの完全可積分系ができる。これらの間をつなぐ完全可積分系の変形族を構成し，その特異ファイバーを具体的に記述した。このような特異ファイバーの存在は，ポテンシャル関数（正則円盤の数え上げ）が不連続に変わる壁を生じさせる。上で構成した完全可積分系の族の場合に，Auroux[1], Pascaleff-Tonkonog[5] の結果を用いて壁越え公式を具体的に書き下し，それが（適当な変数変換の下で）ミラー側のクラスター変換（この場合は Plücker 座標たちの間の Plücker 関係式に他ならない）に一致することを証明した。Gr(2,n) の場合には，ミラー側でクラスター座標近傍に対応する完全可積分系が全て構成できているため, ミラー多様体のクラスター多様体（クラスター座標近傍を貼り合わせてできる多様体）としての構造を，Gr(2,n) 上のシンプレクティック幾何（Floer 理論）からほぼ理解することができたといえる。

(2) より一般の Grassmann 多様体についても，完全可積分系の壁越え公式とミラー側のクラスター変換の関係を研究した。平面 Grassmann 多様体 Gr(2,n) 以外の場合には，Plücker 座標以外のクラスター変数を座標に持つクラスター座標近傍が存在する。また，一般の Grassmann 多様体の場合には，すべてのクラスター座標近傍に対応するべき完全可積分系が知られているわけではない。そこで，まずは 6 次元ベクトル空間内の 3 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 Gr(3,6) の場合に，Gelfand-Cetlin 系に対する壁越え公式を詳しく調べた。Gelfand-Cetlin 系に対応するミラー側のクラスター座標近傍からは 4 通りのクラスター変換を考えることができる。そこで，Gelfanc-Cetlin 系の 4 通りの変形を構成し，それぞれに対する壁越え公式がミラー側のクラスター変換と一致することを証明した。ここで現れるクラスター変換には Plücker 座標以外のクラスター変数が現れるため，Gr(2,n) 以外の場合を理解するうえで重要な例が得られたといえる。より一般の Grassmann 多様体の場合にも，Gelfand-Cetlin 系に対する Floer 理論とクラスター変換の理解が進みつつある。

(3) 一般化されたテータ関数は Landau-Ginzburg ミラーのスーパーポテンシャルの構成要素となる。平面 Grassmann 多様体 Gr(2,n) や Gr(3,6) の場合にはポテンシャル関数とその壁越え公式を具体的に記述することができたため，テータ関数の理解に関しても一定の進展があったとはいえるが, “ テータ関数 ”としての性質の理解まだまだ理解は不十分な状態である。このテーマについては今後も引き続き研究を続けていきたい。

〈引用文献〉

[1] D. Auroux, Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor, J. Gökova Geom. Topol. GGT 1 (2007), 51–91.
[2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, Astérisque No. 376 (2016), vi+340 pp.
[3] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions, Adv. Math. 224 (2010), no. 2, 648–706.
[4] Y. Nohara and K. Ueda, Toric degenerations of integrable systems on Grassmannians and polygon spaces, Nagoya Math. J. 214 (2014), 125–168.
[5] J. Pascaleff and D. Tonkonog, The wall-crossing formula and Lagrangian mutations, Adv. Math. 361 (2020), 106850, 67 pp.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Y. Nohara and K. Ueda	４．巻 -
２．論文標題 Potential functions on Grassmannians of planes and cluster transformations	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 野原雄一	４．巻 -
２．論文標題 Lagrangian fibrations on two-plane Grassmannians and mirror symmetry	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Geometry and Analysis Fukuoka	６．最初と最後の頁 53-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yuichi Nohara, Kazushi Ueda	４．巻 14
２．論文標題 Floer cohomologies of non-torus fibers of the Gelfand-Cetlin system	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	６．最初と最後の頁 1251-1293
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://dx.doi.org/10.4310/JSG.2016.v14.n4.a9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　9件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 野原雄一
２．発表標題 Lagrangian fibrations on Grassmannians and cluster transformations
３．学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Potential functions on two-plane Grassmannians and cluster transformations

３．学会等名
Kobe Studio Seminar for Mathematics（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Lagrangian fibrations on two-plane Grassmannians and mirror symmetry

３．学会等名
慶応大学 微分幾何・トポロジーセミナー

４．発表年
2017年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Lagrangian fibrations on two-plane Grassmannians and mirror symmetry

３．学会等名
2017年度福岡大学微分幾何研究集会（招待講演）

４．発表年
2017年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Potential functions on two-plane Grassmannians and cluster mutations

３．学会等名
名古屋大学幾何学セミナー

４．発表年
2018年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Floer theory on Grassmann and cluster algebra

３．学会等名
研究集会「シンプレクティック幾何とその周辺」（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Yuichi Nohara

２．発表標題
Integrable systems on Grassmannians and mirror symmetry

３．学会等名
International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

１．発表者名
野原雄一

２．発表標題
Lagrangian fibrations on Grassmannians and mirror symmetry

３．学会等名
研究集会「量子化の幾何学2016」（招待講演）

４．発表年
2016年

１．発表者名
Yuichi Nohara

２．発表標題
Lagrangian fibrations on Grassmannians and cluster transformations

３．学会等名
Workshop on mirror symmetry and related topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

1．発表者名 Yuichi Nohara
2．発表標題 Lagrangian fibrations on two-plane Grassmannians and mirror symmetry
3．学会等名 IBS-CGP Seminar（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 野原雄一
2．発表標題 Lagrangian fbrations on Grassmannians and mirror symmetry
3．学会等名 日本数学会 2015年度秋季総合分科会（招待講演）
4．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考