

令和 3 年 6 月 6 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2020

課題番号：15K04848

研究課題名（和文）偏極代数多様体に対する小林・ヒッチン対応のケーラー・リッチ流の観点からの研究

研究課題名（英文）Studies on Kobayashi-Hitchin correspondence from the view point of Kähler-Ricci flow

研究代表者

中川 泰宏（Nakagawa, Yasuhiro）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：90250662

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,700,000円

研究成果の概要（和文）：KSM 多様体と呼ばれる，Einstein・Kähler・Fano多様体を底空間とし，トーリック Fano多様体をファイバーとするファイバー空間である種の条件を満たすFano多様体を導入し，その上に Einstein・Kähler計量の一つの一般化であるKähler・Ricciソリトンが存在することを示した．特に底空間として等質的でないEinstein・Kähler・Fano多様体を選べば，概等質的でないKähler・Ricciソリトンの例を構成することができる．

研究成果の学術的意義や社会的意義

Einstein・Kähler計量やその一般化である定スカラー曲率Kähler計量，端的Kähler計量，Kähler・Ricciソリトン等の知られている具体例は，大きな群が作用する概等質的なものがほとんどである．我々の考えたKSM多様体は底空間として勝手なEinstein・Kähler・Fano多様体を考えることができるので，等質的でない Einstein・Kähler・Fano多様体を底空間に選べば，概等質的でないKähler・Ricciソリトンを多数構成できる．

研究成果の概要（英文）：We introduced the notion of KSM-manifold, which has the structure of a fiber bundle over an Einstein-Kähler Fano manifold whose fiber is a toric Fano manifold, and proved that every KSM-manifold admits a Kähler-Ricci soliton. In particular, by choosing a non-homogeneous Einstein-Kähler Fano manifold as a base-space, then we can obtain an example of non-almost-homogeneous Kähler-Ricci soliton.

研究分野：複素幾何学

キーワード：Einstein・Kähler計量 Kähler・Ricciソリトン 満洲ソリトン 安定性 トーリックFano多様体 KS  
M多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

Kähler 多様体上の正則ベクトル束に Einstein・Hermite 計量と呼ばれる良い計量が存在すること、その正則ベクトル束が Mumford・竹本の意味で安定であることが同値であるという結果が 1980 年代に小林・Lübke・Donaldson・Uhlenbeck・Yau らによって示され、「小林・Hitchin 対応」として知られている。この結果により、正則ベクトル束のモジュライ空間を微分幾何学的に研究することが可能となった。

同様に偏極代数多様体のモジュライ空間の問題を考えると、偏極代数多様体上に定スカラー曲率 Kähler 計量が存在すること、その偏極代数多様体が幾何学的不変式論の意味で安定であることが、同値であることが期待される。これがいわゆる「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」である。この予想を肯定的に示すことができれば、代数幾何学における重要な研究対象である、偏極代数多様体のモジュライ空間を微分幾何学の手法を用いて研究することが可能となる。例えば、Gromov により始められ、Cheeger・Colodning・加須栄・塩谷・山口らにより、現在も盛んに研究が進められている Riemann 多様体の崩壊に関する理論等を用いることができるかもしれない。しかし、幾何学的不変式論の枠組みではいろいろな安定性を考えることができるので、「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を考えると、どの安定性を採用すべきかということがまず問題となる。この問題は現在のところ、Tian・Donaldson らにより導入された K 安定性が有力である。K 安定性を用いた「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」は「Donaldson・Tian・Yau 予想」と呼ばれている。実際、Tian や Chen・Donaldson・Sun により、Fano 多様体のとき(すなわち、偏極が反標準類のとき)には「Donaldson・Tian・Yau 予想」は解決されている。しかし、この K 安定性で本当に良いのかという少し疑問が残る。もう少し具体的にいうと、K 安定性を用いて偏極代数多様体の「良い」モジュライ空間の構成ができるのかということが問題である。この問題に関しては、尾高・Spotti・Sun・Thomas 等により最近少しずつ研究が進められつつある。しかしながら、まだ十分な状況であると思えない。

そこで、本研究では Kähler・Ricci 流の観点から、この問題を考察したい。Ricci 流の方程式は、Perelman による Poincaré 予想の解決に用いられて以来、近年盛んに研究され、いろいろな問題において成功を修めている。Einstein・Kähler 計量の問題を Kähler・Ricci 流を用いて調べるという研究手法は 1980 年代からある。Donaldson・Uhlenbeck・Yau による元々の正則ベクトル束の場合の「小林・Hitchin 対応」の解決においては、熱流の方程式が非常に重要な役割を演じたいことを考えると、問題の解決への期待が高まる。

### 2. 研究の目的

本研究では、Kähler・Ricci 流の観点から、「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を考察したい。Ricci 流の方程式は、Perelman による Poincaré 予想の解決に用いられて以来、近年盛んに研究され、いろいろな問題において成功を修めている。Einstein・Kähler 計量の問題を Kähler・Ricci 流を用いて調べるという研究手法は 1980 年代からあり、例えば Cao は第一 Chern 類が零または負のときに、Einstein・Kähler 計量の存在を Kähler・Ricci 流を用いて示している。しかし、第一 Chern 類が正のとき(このときは Fano 多様体となる)は、存在に対する障害が知られており、大変難しい問題である。

一方、Kähler・Ricci 流の観点から Fano 多様体の安定性に関する考察をした研究は少しずつ進んでいるようであるが、まだまだ不十分な状態である。しかし、Donaldson や Uhlenbeck・Yau による正則ベクトル束のときの「小林・Hitchin 対応」の解決が熱流の方程式を用いていたことや、Cao の結果から、この観点で大きな結果が得られることは十分期待できそうである。

Kähler・Ricci 流を用いた手法では、扱える偏極は(反)標準類の場合に限られてくる。一般の偏極を扱えるような一般化もあることはあるが、あまり扱い易くはないようである。そこで、より扱い易く、(反)標準類のときも統一的に扱うことができるような方程式を導入したい。

また、Kähler・Ricci 流の定常解を与える Kähler・Ricci ソリトンについても考察したい。この Kähler・Ricci ソリトンは Einstein・Kähler 計量の拡張の一つとなっているのであるが、これはまだ幾何学的不変式論の枠組みでは捉えられていないようである。Kähler・Ricci ソリトンを「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の観点からの位置付けは大変興味深い問題である。

### 3. 研究の方法

まず Fano 多様体上の Kähler・Ricci ソリトンの存在問題について考えた。これまで具体的に知られている Kähler・Ricci ソリトンの例は、小磯により構成された、Einstein・Kähler 多様体上のある種の射影直線束の上の Kähler・Ricci ソリトンと、Wang・Zhu により存在が証

明されたトーリック Fano 多様体上の Kähler・Ricci ソリトンぐらいであった。Kähler・Ricci ソリトンをより深く理解するには、まだ例が少ないと思われるので、まずは Kähler・Ricci ソリトンの具体例の構成を考える。具体的には、Einstein・Kähler 多様体を底空間とし、トーリック Fano 多様体をファイバーとするファイバー空間である種の条件を満たすもの (KSM 多様体と呼ぶことにした) の上に Kähler・Ricci ソリトンを構成することを考えた。これは、小磯の Kähler・Ricci ソリトンの例の高次元化とも考えられるし、Wang・Zhu のトーリック Fano 多様体に対する結果の相対化とも考えることができる。

Kähler・Ricci ソリトンとは別の Einstein・Kähler 計量の一般化としては、満洲により導入され、最近では満洲ソリトンと呼ばれるものがある。この満洲ソリトンについては、Yi Yao や中村聡等により最近詳しく研究されており、トーリック Fano 多様体の場合に満洲ソリトンの存在することと相対的一様 Ding 安定であることが同値であるとの関係が証明された。そこで、彼らの結果を KSM 多様体の場合にまで拡張することを考えた。

#### 4. 研究成果

(1) まず、Einstein・Kähler 多様体上のいくつかの正則直線束の直和をとり、そのファイバーをトーリック Fano 多様体にコンパクト化することにより、トーリック Fano 多様体をファイバーとするファイバー空間を構成する。この空間が Fano 多様体になるように正則直線束達の曲率に条件を課したものを KSM 多様体と呼ぶ。この様にして導入した KSM 多様体には必ず Kähler・Ricci ソリトンが存在することを証明した。存在性の証明には、Berman・Berndtsson による実 Monge・Ampère 方程式の理論と、斎藤・高橋による乗数 Hermite 流の理論を用いた。

(2) 満洲により導入された、満洲ソリトンと呼ばれる Einstein・Kähler 計量の一般化に対して、トーリック Fano 多様体の場合に満洲ソリトンの存在することと相対的一様 Ding 安定であることが同値であるとの関係が Yi Yao や中村聡等により証明された。そこで、中村聡氏 (沼津高専) と共同研究をすすめ、Yao・中村の結果を KSM 多様体の場合にまで拡張することに概ね成功した。ただし、現段階では端的 Kähler ベクトル場がファイバー方向に接しているという仮定の下での証明になっている。しかしながら、この仮定は本質的とは思えず、この仮定なしで (あるいは、この仮定自体を証明することができて) 証明されることが期待される。これらの事については今後の課題であり、この結果については、まだ論文という形にはまとめてはいない。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yasuhiro Nakagawa	4. 巻 73
2. 論文標題 Kähler-Ricci solitons on certain toric bundles	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyusyu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 379--390
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.73.379	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Nakagawa and Hidekazu Sato	4. 巻 会議録
2. 論文標題 Periodic surfaces of revolution in $R^3$ and closed plane curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Recent topics in differential geometry and its related fields	6. 最初と最後の頁 203--209
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Nakagawa	4. 巻 26
2. 論文標題 On the examples of Nill and Paffenholz	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 673 687
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X15400078	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 10件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 KSM 多様体上の満洲ソリトンについて
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2020（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 KSM 多様体上の Kaehler・Ricci ソリトン
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 周期的な回転面と平面閉曲線について(招待講演)
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 On the existence problems for Kaehler-Ricci solitons on certain toric bundles
3. 学会等名 第 22 回複素幾何シンポジウム(金沢) (The 22nd Symposium on Complex Geometry) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 ある種のトーリック束の上の Kaehler・Ricci ソリトンの存在問題について
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 ある種のトーリック束の上の Kaehler・Ricci ソリトンの存在問題
3. 学会等名 東工大幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 ある種のトーリック束の上の Kaehler・Ricci ソリトンについて
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2017（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 非対称 Einstein・Kaehler トーリック Fano 多様体について
3. 学会等名 RIMS 研究集会「幾何学・組合せ論に現れる環と代数構造」（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 ある種のトーリック束の上の Einstein-Kaehler 計量について
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2016（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 中川 泰宏
2. 発表標題 ある種のトーリック束の上の Einstein・Kähler 計量の存在問題について
3. 学会等名 2016 名城幾何学研究集会「幾何構造の深化」(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関